

圣彼得堡悖论的计算机模拟分析

The Computer Simulation of St. Petersburg Paradox

朱琳 叶向 (中国人民大学 信息学院 北京 100872)

摘要: 由于实现方法和成本的限制, 经济学中的很多悖论在实际中无法得到全面检验。通过计算机模拟的方法, 采用微软公司 Excel 软件及其 VBA 语言, 对圣彼得堡悖论进行完整的计算机模型建立和模拟。通过对实验数据的定量分析, 对圣彼得堡悖论的现有理论做出数学意义上的解释。

关键词: 计算机模拟 圣彼得堡悖论 Excel VBA

1 圣彼得堡悖论

圣彼得堡悖论是 Daniel Bernoulli 于 1728 年提出的一个源自掷币游戏的关于概率期望值的悖论^[1], 内容如下: 游戏设定投掷出正面或反面为成功, 游戏者如果第一次投掷成功, 则游戏中止, 获得奖金 2 元; 如果第二次投掷成功, 则游戏中止, 获得奖金 4 元; 如果第 n 次才投掷成功, 则游戏中止, 获得奖金 2^n 元。

假设硬币是均匀的, 则游戏的期望报酬应该为

$$2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 2^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = \infty$$

即, 游戏的期望值为无穷大。

从概率论的角度考虑, 人们无论票价多高都应该玩这个游戏。但是经验数据表明, “没有人愿意花 25 元去参加这样一个游戏”^[2]。这样, 就出现了一个计算的期望值与实际情况的矛盾。我们需要对这一现象做出合理的解释。

2 计算机模拟分析

计算机模拟和系统学是近代科学技术革命具有代表性的科学技术。按照“国际标准化组织(ISO)标准”的名词解释, 模拟或仿真(Simulation)是指依据某系统的某些物理或抽象特征, 用另一个系统(模型)表示该真实系统的过程。计算机模拟是利用电子计算机对系统进行试验, 通过试验对系统的内部结构、功能和行为进行有效模拟的过程。

依托于仿真软件的发展, 计算机模拟提供了一种

快速、高效、低成本的实验方法。同时, 计算机模拟还具有优化设计、安全性、可预见性等特点。运用仿真软件实现对不确定性问题的定量分析, 其基本应用步骤如下:

(1) 模型建立

根据实际问题, 利用仿真软件的自定义编程语言和编程接口, 设定输入输出变量, 并对输入输出变量之间的数学关系进行严格描述。对于需要原始数据的模型则还必须输入合适的实验样本。

(2) 软件模拟

模型建立、数据输入完成后, 触发软件进入模拟运行状态。软件自动完成整个模拟过程, 并按照用户需要, 保存和分析计算结果。

(3) 模拟结果分析

模拟过程结束后, 软件自动生成相关的数据资料。例如以图表方式表现概率、预测值、敏感度等结果。用户根据得到的结果进行分析, 推导出最终结论。

3 圣彼得堡悖论的Excel模拟分析

由于投掷硬币得到正面和反面为等概率事件, 即:

$$P(\text{正面}) = P(\text{反面}) = 0.5$$

所以可以用如下的相关性来表示:

0.00000 ~ 0.49999 正面相关

0.50000 ~ 0.99999 反面相关

对圣彼得堡游戏做出两个假设:

(1) 以投掷得到正面作为游戏终止的条件

(2)假设单轮游戏中最高投掷次数不会超过 36 次假设(2)的合理性证明见第 3.3 节。

3.1 单次圣彼得堡游戏的 Excel 模型

按照上面的前提条件，每次投掷的随机值由函数 RAND()产生。如果该次 RAND()函数运算结果小于 0.5，投掷出正面；反之，投掷得到反面。游戏结果同样根据该次 RAND()函数运算结果来判断。如果该次 RAND()函数结果小于 0.5，游戏继续；反之，游戏终止。最后采用单元格数值匹配的方法获得该次游戏的实际投掷次数，并计算出奖金数额。

图 1 显示了单次圣彼得堡游戏的结果。

A	B	C	D
圣彼得堡游戏的Excel单次模拟			
投掷次序	随机值	投掷结果	游戏结果
1	0.97139672	反面	继续
2	0.862542005	反面	继续
3	0.238504349	正面	终止
36	0.526584684	反面	终止
统计结果			
终止条件		正面	
投掷次数		3	
奖金数额		8	

图 1 单次圣彼得堡游戏模型计算结果

在这次模拟中，游戏在第三次投掷中得到了正面，游戏中止。该次游戏，玩家获得的奖金数额为 8 元。

3.2 单轮圣彼得堡游戏的 Excel 模型

由于圣彼得堡游戏的不确定性，为了获得可信度较高的均值数据，需要进行多次计算机模拟。在第 3.1 节的模型基础上，利用 Visual Basic for Applications (VBA)语言生成多次模拟计算，并将计算结果记录^[3]。下面的讨论中，对一次性连续多次的游戏模拟称为一轮游戏模拟。

一轮圣彼得堡游戏由多个单次圣彼得堡游戏组成。每次 Excel 页面的刷新都会触发单次圣彼得堡游戏的重新运行。抓取每次运行的投掷次数和奖金数额这两个结果，将其重新排列并进行统计，可以得到单轮多次圣彼得堡游戏的 Excel 模型。

设定本轮游戏运行 4000 次，其结果在图 2 中显示。

从图 2 的结果中可以看出，在本轮 4000 次模拟计算中，尽管最高的单次游戏奖金数额达到 2048 元，但是其平均奖金数额只有 11.0585 元。同时结果显示，在这 4000 次模拟中，每次游戏的平均投掷次数

只有 2.04275 次。也就是说，对单次游戏来讲，平均能够得到的奖金数只有 4.120 元。之所以可以达到 11.0585 元的平均奖金数额，是因为游戏的不确定性，产生了 11 次的单次投掷次数，该次游戏的 2048 元奖金数额导致了奖金均值的大幅增加。

单轮圣彼得堡游戏的Excel模拟		
游戏轮数	投掷次数	奖金数额
1	1	2
2	3	8
3999	4	16
4000	1	2
统计结果		
模拟次数	4000	
平均投掷次数	2.04275	
平均奖金数额	11.0585	
单次最高投掷次数	11	
最高奖金数额	2048	

图 2 单轮圣彼得堡游戏模型计算结果

3.3 圣彼得堡游戏的多轮 Excel 模拟结果统计

在实际游戏中，每轮游戏单元进行的游戏次数是不确定的。在第 3.2 节的讨论中，设定游戏次数为 4000。这样单次的实验还是无法全面反映实际的情况。

设定单轮游戏的游戏次数从 100 到 10000 以 100 的步进间隔变化^[4]。这样，就建立了样本容量为 100 的多轮圣彼得堡游戏的 Excel 统计模型。

利用 VBA 语言，在第 3.2 节的单轮圣彼得堡游戏 Excel 模型基础上，建立多轮圣彼得堡游戏的 Excel 统计模型，其运行结果如图 3 所示。

圣彼得堡游戏多轮Excel模拟的统计				
模拟次数	奖金均值	最多投掷次数	最高奖金数额	平均投掷次数
100	12.22	9	512	2.07
200	13.71144	10	1024	1.955223881
9900	15.67737	15	32768	1.997474747
10000	14.3136	14	16384	2.0116

图 3 圣彼得堡游戏多轮 Excel 模拟结果的统计

根据图 3 的统计数据，对最高投掷次数进行分析，其结果显示在图 4 中。

图 4 的横轴为每轮游戏的总的游戏次数，纵轴为该轮进行的所有游戏中最高的一次投掷次数。这里可以证明模型建立之初假设(2)的合理性。大样本实验的统计数据证明：圣彼得堡游戏中，最多投掷次数小于 36。

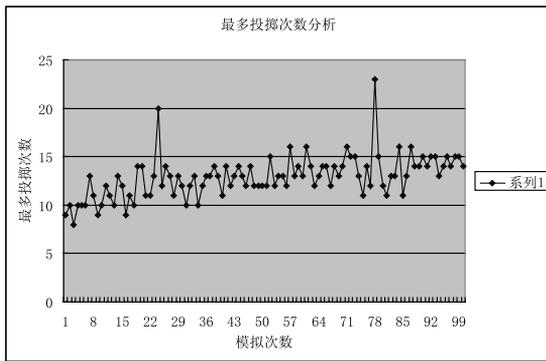


图 4 最多投掷次数分析

根据图 3 中的统计数据，生成关于奖金均值的折线图分析，如图 5 所示。

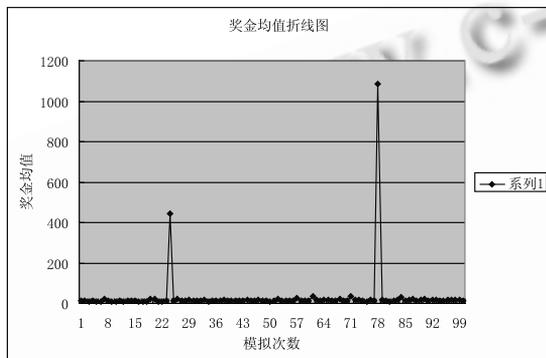


图 5 奖金均值折线图

在 $X=24$ 和 $X=78$ 处存在明显的异常数值，其产生源于随机实验的不确定性。剔除这两个数据，重新生成图 6。

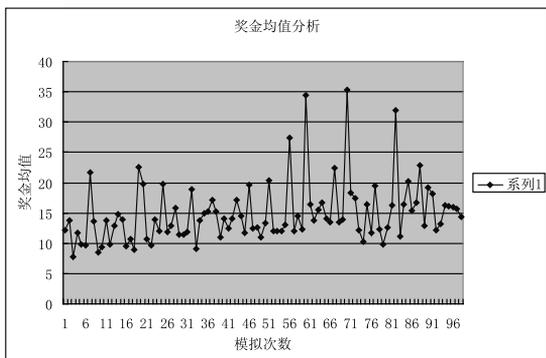


图 6 修正后的奖金均值分析

在图 6 中，所有 100 个样本值中，只有四个样本值在 25 之上。绝大多数的奖金均值都在 25 元以下，

所以，没有人会愿意以 25 元的代价玩这个游戏。从这个统计分析的结果，认为参考文献[2]中给出的结论是合理的。

对这 100 模拟的平均投掷次数进行分析，得到图 7 所示的图表。

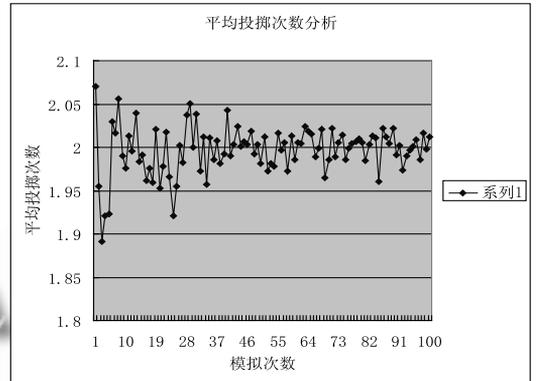


图 7 评价投掷次数分析

从每轮 100 次游戏到每轮 4600 次游戏的样本，其平均投掷次数相对分散，但是从图 7 中，容易看出平均投掷次数趋向于 2 的收敛性。

4 结语

从以上的实验数据分析能够得出如下的结论：

- (1) 圣彼得堡游戏的平均单次投掷次数趋近于 2；
- (2) 单次圣彼得堡游戏最高投掷次数小于 36 次；
- (3) 由于实验的随机性，单次游戏可以达到较高的奖金数额，但由于其很小的概率不会对游戏参与者产生吸引力；

(4) 圣彼得堡游戏无穷大奖金期望值是建立在无穷大样本容量的基础上的。由于实际情况的限制，这个期望值无法达到。

参考文献

- 1 Bernoulli D. Exposition of New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica*, 1954, (22): 23 - 36.
- 2 Hacking I. Strange Expectations. *Philosophy of Science*, 1980, 47: 562 - 567.
- 3 Moors JH, Weatherford LR. *Decision Modeling with Microsoft Excel*. 6th ed., 2001.
- 4 熊伟. 运筹学. 北京: 机械工业出版社, 2005.