







明距离为:

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \frac{1}{2} (|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| + \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|) \quad (2)$$

(2) 概率犹豫模糊元  $h_1(P_x)$  与  $h_2(P_x)$  之间拓展的标准欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \left( \frac{1}{2} (|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))|^2 + \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

(3) 概率犹豫模糊元  $h_1(P_x)$  与  $h_2(P_x)$  之间拓展的一般欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \left[ \frac{1}{2} (|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))|^\varphi + \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^\varphi) \right]^{\frac{1}{\varphi}} \quad (4)$$

(4) 概率犹豫模糊元  $h_1(P_x)$  与  $h_2(P_x)$  之间的拓展的加权海明距离为:

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \mu |u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| + \nu \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda| \quad (5)$$

(5) 概率犹豫模糊元  $h_1(P_x)$  与  $h_2(P_x)$  之间拓展的加权标准欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \left( \mu |u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))|^2 + \nu \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

(6) 概率犹豫模糊元  $h_1(P_x)$  与  $h_2(P_x)$  之间拓展的加权一般欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \left( \mu |u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))|^\varphi + \nu \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^\varphi \right)^{\frac{1}{\varphi}} \quad (7)$$

其中,  $l = \max(l_1, l_2)$ ,  $0 \leq \mu, \nu \leq 1$  且  $\mu + \nu = 1$ ,  $\varphi > 0$ . 特别的, 当  $\varphi = 1$  且  $\mu = \nu = 0.5$  时, 式 (7) 退化为拓展的海明距离, 即式 (2); 当  $\varphi = 2$  且  $\mu = \nu = 0.5$  时, 式 (7) 退化为拓展的标准欧式距离, 即式 (3); 当  $\mu = \nu = 0.5$  时, 式 (7) 退化为拓展的一般欧式距离, 即式 (4); 当  $\varphi = 1$  时, 式 (7) 退

化为拓展的加权海明距离, 即式 (5); 当  $\varphi = 2$  时, 式 (7) 退化为拓展的加权标准欧式距离, 即式 (6).

性质 1. 式 (2) 中的距离  $D(h_1(P_x), h_2(P_x))$  满足:

- ①  $0 \leq D(h_1(P_x), h_2(P_x)) \leq 1$ ;
- ②  $D(h_1(P_x), h_2(P_x)) = 0$ , 当且仅当  $h_1(P_x) = h_2(P_x)$ ;
- ③  $D(h_1(P_x), h_2(P_x)) = D(h_2(P_x), h_1(P_x))$ .

证明:

① 因为  $0 \leq u(h_1(P_x)) \leq 1$ ,  $0 \leq u(h_2(P_x)) \leq 1$ , 则  $0 \leq |u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| \leq 1$ ; 又因为  $0 \leq \gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda \leq 1$ , 因此  $0 \leq |\gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda - \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda| \leq 1$ , 故  $0 \leq D(h_1(P_x), h_2(P_x)) \leq 1$ .

② 若  $h_1(P_x) = h_2(P_x)$ , 则  $u(h_1(P_x)) = u(h_2(P_x))$  且  $\gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda = \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda$ , 因此  $|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| = 0$  且  $|\gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda - \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda| = 0$ , 故  $D(h_1(P_x), h_2(P_x)) = 0$ ;

若  $D(h_1(P_x), h_2(P_x)) = 0$ , 则  $|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| = 0$  且  $|\gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda - \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda| = 0$ , 因此  $u(h_1(P_x)) = u(h_2(P_x))$  且  $\gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda = \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda$ , 故  $h_1(P_x) = h_2(P_x)$ .

$$D_H(h_1(P_x), h_2(P_x)) = \frac{1}{2} (|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| + \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|)$$

$$D_H(h_2(P_x), h_1(P_x)) = \frac{1}{2} (|u(h_2(P_x)) - u(h_1(P_x))| + \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l |\gamma_2^\lambda p_2^\lambda - \gamma_1^\lambda p_1^\lambda|)$$

因为  $|u(h_1(P_x)) - u(h_2(P_x))| = |u(h_2(P_x)) - u(h_1(P_x))|$  且  $|\gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda - \gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda| = |\gamma_2^\lambda \cdot P_2^\lambda - \gamma_1^\lambda \cdot P_1^\lambda|$ , 故  $D(h_1(P_x), h_2(P_x)) = D(h_2(P_x), h_1(P_x))$

同理可得式 (3)~式 (7) 也满足性质 1 的内容, 此处不再赘述.

## 2.2 建立前景决策矩阵

在多属性决策问题中, 设方案集  $A = \{A_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ , 属性集  $C = \{C_j | j = 1, 2, \dots, n\}$ , 决策矩阵为  $B = [B_{ij}]_{m \times n}$ , 其中,  $B_{ij}$  表示第  $i$  个方案的第  $j$  个属性值, 决策者根据已经获得的信息以及对未来的预期给出了关于属性的期望向量  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ .

根据定义 4 中通过计算概率犹豫模糊元的得分函数以及方差来确定两个概率犹豫模糊元之间的大小关系的比较方法, 确定  $B_{ij}$  与  $E_j$  之间的大小关系, 从而判断各个方案在该属性下相对于期望是“收益”还是“损失”.

当  $B_{ij} \geq E_j$  时, 表示第  $i$  个方案的第  $j$  个属性相对于期望值  $E_j$  是获得收益的; 当  $B_{ij} < E_j$  时, 表示第  $i$  个方案的第  $j$  个属性相对于期望值  $E_j$  是遭受损失的.

以  $E_j$  为参考点, 则  $B_{ij}$  的前景价值函数为:

$$v(B_{ij}) = \begin{cases} (D_H(E_j, B_{ij}))^\alpha & B_{ij} \geq E_j \\ -\theta(D_H(E_j, B_{ij}))^\beta & B_{ij} < E_j \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\alpha$ 、 $\beta$  分别表示偏好风险和厌恶风险的系数, 且  $0 < \alpha$ 、 $\beta < 1$ ;  $\theta$  表示损失规避系数, 且  $\theta > 1$ .  $\alpha$ 、 $\beta$  越大, 表示决策者越倾向于冒险;  $\theta$  越大, 表示决策者面对损失时的规避程度越大.

关于 3 个参数  $\alpha$ 、 $\beta$  以及  $\theta$  的取值, Tversky 等<sup>[16]</sup> 通过大量的实验测试以及相关分析, 得出一组能够表示任意决策者心理行为的参数值  $\alpha = \beta = 0.88$ ,  $\theta = 2.25$ . 另外, 文献 [18,19] 通过实验对这 3 个参数的取值进行了相关的分析研究, 得到了与上述取值非常相近的参数值. 此外, 文献 [13,20] 在研究应用中也采用上述的参数值, 可见上述参数值在实际的决策中具有非常重要的意义. 因此, 本文在后续的算例分析中也采用上述参数值进行计算.

最后通过计算前景价值函数, 建立前景决策矩阵  $V = [v(B_{ij})]_{m \times n}$ .

### 2.3 确定属性权重

设方案集  $A = \{A_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ , 属性集  $C = \{C_j | j = 1, 2, \dots, n\}$ , 属性权重为  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ,  $w_j \in [0, 1]$  且  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . 本文基于离差最大化思想构建在概率犹豫模糊集环境下的属性权重确定模型. 具体模型如下<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned} \max f(w) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})| w_j \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{j=1}^n (w_j)^2 = 1 \\ 0 \leq w_j \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

构造拉格朗日函数来求解上述模型:

$$\begin{aligned} L(w, \eta) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})| w_j \\ &\quad + \frac{\eta}{2} \left( \sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

对式 (9) 分别关于  $w_j$ 、 $\eta$  求偏导, 并设其为 0, 获得

等式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(w_j, \eta)}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})| + \eta w_j = 0 \\ \frac{\partial L(w_j, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

求解式 (10) 得:

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})| \right)^2}} \quad (11)$$

对  $w_j$  进行单位化得属性权重为:

$$w_j^* = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})|}{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |D_H(E_j, B_{ij}) - D_H(E_j, B_{kj})| \right)} \quad (12)$$

### 3 决策步骤

对于概率犹豫模糊多属性决策问题, 根据上述的定义、性质以及分析, 本文提出基于前景理论的概率犹豫模糊多属性决策方法, 具体步骤如下:

步骤 1. 专家以概率犹豫模糊元的形式给出每个方案在各个属性下的评价值, 得到概率犹豫模糊决策矩阵  $B = [B_{ij}]_{m \times n}$ .

步骤 2. 对决策矩阵进行标准化处理, 得到标准化概率犹豫模糊决策矩阵  $B' = [B'_{ij}]_{m \times n}$ , 标准化方法如下:

将属性分类为效益性属性以及成本型属性, 若属性  $C_j$  为效益性属性, 则原决策矩阵中的概率犹豫模糊元保持不变; 若属性  $C_j$  为成本型属性, 则原决策矩阵中的概率犹豫模糊元为其补集. 即:

$$B'_{ij} = \begin{cases} B_{ij} = \{\gamma_{ij}^\lambda(P_{ij}^\lambda) | \lambda = 1, 2, \dots, l\} & C_j \in \text{效益型} \\ B_{ij}^c = \{[1 - \gamma_{ij}^\lambda](P_{ij}^\lambda) | \lambda = 1, 2, \dots, l\} & C_j \in \text{成本型} \end{cases}$$

步骤 3. 决策者给出属性期望向量  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , 并且采用定义 8 中的公式计算  $B'_{ij}$  与  $E_j$  之间拓展的距离, 得到距离矩阵  $D_{ij} = [D_H(E_j, B'_{ij})]_{m \times n}$ .

步骤 4. 结合距离矩阵以及式 (8), 建立前景决策矩阵  $V = [v(B'_{ij})]_{m \times n}$ .

步骤 5. 运用式 (12) 计算各个属性的权重, 得到属

性权重向量  $w^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*]^T$ .

步骤 6. 计算各个方案的综合前景值:

$$V_i^* = \sum_{j=1}^n v(B'_{ij})w_j^* \quad (13)$$

再进行排序并选择最优方案,  $V_{ij}^*$  的值越大, 表示方案越优.

## 4 算例分析

### 4.1 算例分析

某企业现需要购买 ERP 系统软件且利用评价指标对 ERP 系统进行选择, 评价指标从独立性、可测性、层次性、简明性和经济性 5 个原则出发进行设立.

现有 4 个 ERP 系统软件品牌  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  可供选择, 通过建立 4 个属性  $C_1$ (软件信誉和服务水平)、 $C_2$ (成本体系)、 $C_3$ (功能满足程度) 和  $C_4$ (系统性能) 作为 ERP 系统软件评价指标体系. 其中,  $C_2$  属于成本型属性,  $C_1$ 、 $C_3$  和  $C_4$  属于效益型属性. 四个属性对应的权重向量为  $w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*)$  未知. 决策者以概率犹豫模糊数的形式给出各个属性的期望向量为:

$$Q = (\{0.6(0.5), 0.8(0.5)\}, \{0.5(0.3), 0.6(0.5), 0.7(0.2)\}, \{0.6(0.6), 0.7(0.4)\}, \{0.6(0.4), 0.8(0.4), 0.9(0.2)\})$$

运用本文方法选择最优方案的步骤如下:

步骤 1. 决策者以概率犹豫模糊数的形式给出决策值, 构建决策矩阵  $B = [B_{ij}]_{m \times n}$  如表 1 所示.

表 1 决策矩阵

软件品牌	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{0.6(0.8), 0.7(0.2)}	{0.6(1)}	{0.6(0.8), 0.7(0.2)}	{0.6(0.3), 0.7(0.3), 0.8(0.4)}
$A_2$	{0.5(1)}	{0.3(0.2), 0.4(0.4), 0.5(0.4)}	{0.5(0.2), 0.6(0.8)}	{0.7(0.5), 0.8(0.5)}
$A_3$	{0.7(0.3), 0.8(0.7)}	{0.3(0.6), 0.5(0.2), 0.6(0.2)}	{0.7(1)}	{0.6(0.3), 0.8(0.2), 0.9(0.5)}
$A_4$	{0.8(0.6), 0.85(0.4)}	{0.5(0.4), 0.7(0.6)}	{0.7(0.3), 0.8(0.7)}	{0.8(1)}

步骤 2. 对决策矩阵进行标准化处理, 得到标准化

概率犹豫模糊决策矩阵  $B' = [B'_{ij}]_{m \times n}$  如表 2 所示.

表 2 标准化后的决策矩阵

软件品牌	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{0.6(0.8), 0.7(0.2)}	{0.4(1)}	{0.6(0.8), 0.7(0.2)}	{0.6(0.3), 0.7(0.3), 0.8(0.4)}
$A_2$	{0.5(1)}	{0.5(0.4), 0.6(0.4), 0.7(0.2)}	{0.5(0.2), 0.6(0.8)}	{0.7(0.5), 0.8(0.5)}
$A_3$	{0.7(0.3), 0.8(0.7)}	{0.4(0.2), 0.5(0.2), 0.7(0.6)}	{0.7(1)}	{0.6(0.3), 0.8(0.2), 0.9(0.5)}
$A_4$	{0.8(0.6), 0.85(0.4)}	{0.3(0.6), 0.5(0.4)}	{0.7(0.3), 0.8(0.7)}	{0.8(1)}

步骤 3. 运用概率犹豫模糊拓展的标准欧式距离公式 (3) 计算决策值与期望值之间的距离, 得到距离矩阵如表 3 所示.

表 3 距离矩阵

软件品牌	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	0.1581	0.5389	0.0922	0.0767
$A_2$	0.5047	0.0319	0.1640	0.1095
$A_3$	0.0918	0.1434	0.5032	0.1304
$A_4$	0.0949	0.0927	0.1588	0.5801

步骤 4. 结合距离矩阵以及式 (8), 计算属性值相对于参照点的收益或损失, 建立前景决策矩阵如表 4.

表 4 前景决策矩阵

软件品牌	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	-0.4439	-1.3059	-0.2761	-0.2349
$A_2$	-1.2326	-0.1085	-0.4584	0.1428
$A_3$	0.1223	0.1810	0.5464	0.1666
$A_4$	0.1259	-0.2774	0.1981	0.6192

步骤 5. 运用式 (12) 计算各个属性的权重, 得到属性权重向量:

$$W^* = (0.2307, 0.2785, 0.2195, 0.2713)$$

步骤 6. 运用式 (13) 计算各个方案的综合前景值:

$$V_1 = -0.5904; V_2 = -0.3765; V_3 = 0.2437; V_4 = 0.1633.$$

最后, 根据各个方案的综合前景值, 将方案进行排序为  $A_3 > A_4 > A_2 > A_1$ .

### 4.2 比较分析

如果采用文献 [21] 提供的方法, 参考点全部取为各个属性下的中位数, 计算相应的决策参考点和综合前景值, 得到方案的综合前景值为:

$$V_1 = -0.3429; V_2 = -0.4119; V_3 = 0.2620; V_4 = 0.1984.$$

将方案进行排序为  $A_3 > A_4 > A_1 > A_2$ .

从结果可以看出, 文献 [21] 提出的方法与本文提出的方法虽然最优方案都是  $A_3$ , 但是总体排列顺序不

同,本文方法得出的结果是方案 $A_2$ 优于方案 $A_1$ ,而文献[21]得出的结果是方案 $A_1$ 优于方案 $A_2$ ,并且从综合前景值的具体数值来看,文献[21]方法的数值之间相隔较近,与本文方法相比其区分度较不明显,这主要是因为采用中位数作为决策参考点时,不能很好地反映决策者的心理预期,而用期望值作为决策参考点得出的结果能够充分考虑决策者的心理行为,更能有效地和前景理论相结合。

若假设决策矩阵中的每个隶属度属于给定集合的概率相同,即以犹豫模糊集的形式给出决策矩阵中的元素,并运用本文的方法计算出各个方案的综合前景值为:

$V_1 = -0.4949$ ;  $V_2 = -0.6450$ ;  $V_3 = 0.0975$ ;  $V_4 = 0.0642$ .  
将方案进行排序为 $A_3 > A_4 > A_1 > A_2$

从排序结果可以看出,在以犹豫模糊集形式给出决策信息的环境下与本文中以概率犹豫模糊集形式给出决策信息的环境下虽然最优方案都是 $A_3$ ,但是总体排列顺序不同,以概率犹豫模糊集形式表示决策信息得出的结果是方案 $A_2$ 优于方案 $A_1$ ,而以犹豫模糊集形式表示决策信息得出的结果是方案 $A_1$ 优于方案 $A_2$ ,原因在于在以犹豫模糊集形式表示决策信息,只体现了每个隶属度的值,认为每个隶属度属于给定集合的概率是相同的,而在实际决策过程中,决策者认为某些隶属度属于给定集合的概率大于其他隶属度,这是很正常的现象.因此在没有考虑每个隶属度属于给定集合的概率的犹豫模糊集环境下,得出的排序结果相对而言没有很好地符合决策者的预期。

## 5 结论

本文将前景理论运用到概率犹豫模糊集的环境中,提出了一种基于前景理论的概率犹豫模糊多属性决策方法.首先根据每个概率犹豫模糊元中的元素个数的不同,给出能够表现出决策者的犹豫程度的犹豫度公式,再结合元素值之间的差异,给出了拓展的海明距离以及欧式距离,其更能够表示出决策者的心理偏好,并且基于距离矩阵采用离差最大化法计算属性权重;然后以决策者的期望值为参考点建立前景决策矩阵,这能够将决策者的心理风险因素引入到概率犹豫模糊集的多属性决策中.该方法能够将心理学与管理决策过程有机地结合起来,更能够反映出人们在面对模糊信

息时的决策行为,能够为概率犹豫模糊环境下的多属性研究提供一种新的思路,是概率犹豫模糊集的有益扩展,可以用于应急决策、创新投资决策等实际问题中.在后面的研究中,重点研究将前景理论放在动态的概率犹豫模糊集环境中,反映出每个时间段由于获得信息不同,决策者对于风险的态度是不同的,从而选择的决策方案可能也会存在不同的决策问题。

## 参考文献

- 1 Zadeh LA. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338–353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]
- 2 Torra V. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 2010, 25(6): 529–539.
- 3 Chen N, Xu ZS, Xia MM. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 37: 528–540. [doi: 10.1016/j.knosys.2012.09.009]
- 4 Wei GW, Wang HJ, Zhao XF, et al. Hesitant triangular fuzzy information aggregation in multiple attribute decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, 26(3): 1201–1209.
- 5 Lin R, Zhao XF, Wei GW. Models for selecting an ERP system with hesitant fuzzy linguistic information. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, 26(5): 2155–2165.
- 6 Xu ZS, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment. *Fuzzy optimization and Decision Making*, 2017, 16(4): 481–503. [doi: 10.1007/s10700-016-9257-5]
- 7 Li J, Wang JQ. Multi-criteria outranking methods with hesitant probabilistic fuzzy sets. *Cognitive Computation*, 2017, 9(5): 611–625. [doi: 10.1007/s12559-017-9476-2]
- 8 Zhang S, Xu ZS, He Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making. *Information Fusion*, 2017, 38: 1–11. [doi: 10.1016/j.inffus.2017.02.001]
- 9 Gao J, Xu ZS, Liao HC. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2017, 19(5): 1261–1278. [doi: 10.1007/s40815-017-0311-4]
- 10 朱峰,徐济超,刘玉敏,等.基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法. *控制与决策*, 2020, 35(8): 1977–1986.
- 11 Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 1979, 47(2): 263–292. [doi: 10.2307/1914185]

- 12 Liu PD, Jin F, Zhang X, *et al.* Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(4): 554–561. [doi: [10.1016/j.knsys.2011.01.010](https://doi.org/10.1016/j.knsys.2011.01.010)]
- 13 张晓, 樊治平. 基于前景理论的风险型混合多属性决策方法. *系统工程学报*, 2012, 27(6): 772–781. [doi: [10.3969/j.issn.1000-5781.2012.06.006](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-5781.2012.06.006)]
- 14 江文奇. 基于前景理论和统计推断的区间数多准则决策方法. *控制与决策*, 2015, 30(2): 375–379.
- 15 龚承柱, 李兰兰, 卫振锋, 等. 基于前景理论和隶属度的混合型多属性决策方法. *中国管理科学*, 2014, 22(10): 122–128.
- 16 Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 1992, 5(4): 297–323. [doi: [10.1007/BF00122574](https://doi.org/10.1007/BF00122574)]
- 17 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法. *控制与决策*, 2017, 32(5): 864–870.
- 18 Abdellaoui M. Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions. *Management Science*, 2000, 46(11): 1497–1512. [doi: [10.1287/mnsc.46.11.1497.12080](https://doi.org/10.1287/mnsc.46.11.1497.12080)]
- 19 Xu HL, Zhou J, Xu W. A decision-making rule for modeling travelers' route choice behavior based on cumulative prospect theory. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2011, 19(2): 218–228. [doi: [10.1016/j.trc.2010.05.009](https://doi.org/10.1016/j.trc.2010.05.009)]
- 20 王正武, 罗大庸, 黄中祥, 等. 不确定性条件下的多目标多路径选择. *系统工程学报*, 2009, 24(3): 355–359. [doi: [10.3969/j.issn.1000-5781.2009.03.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1000-5781.2009.03.015)]
- 21 江文奇. 基于前景理论和 VIKOR 的风险型模糊多准则决策方法. *控制与决策*, 2014, 29(12): 2287–2291.