

# 利用改进的随机松弛法求解旅行商问题<sup>①</sup>

徐小平<sup>1</sup>, 朱秋秋<sup>1</sup>, 邵会强<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(西安理工大学 理学院, 西安 710054)

<sup>2</sup>(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

**摘要:** 旅行商问题是一个典型的组合优化问题, 也是多种复杂问题的一种简化形式. 因此, 寻求一种有效的算法来求解此问题成为研究热点. 随机松弛法是一种基于 Metropolis 迭代法求解的启发式随机搜索算法. 针对该算法在求解旅行商问题时, 存在易陷入局部最优的缺点, 本文提出了三种不同的改进方法. 即就是说, 在解变换产生新解的过程中, 首先, 随机选择三个城市. 然后, 分别给出了三种不同的随机处理方法. 最后, 在仿真研究中, 与已有方法相比, 结果表明所给的三种方法的路径更短, 结果更优.

**关键词:** 旅行商问题; 组合优化; Metropolis 准则; 随机松弛法启发式算法

## Solving Traveling Salesman Problem by Improved Stochastic Relaxation Method

XU Xiao-Ping<sup>1</sup>, ZHU Qiu-Qiu<sup>1</sup>, TAI Hui-Qiang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

<sup>2</sup>(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** Traveling salesman problem (TSP) is a classical combinatorial optimization problem. Moreover, it is also a predigested form of various complex problems. Consequently, it is a research hotspot that an effective algorithm is found to solve this problem. The stochastic relaxation method is a kind of heuristic random search algorithm based on Metropolis iteration method. In order to solve the problem of plunging into local optimum of the algorithm when solving TSP, this paper puts forward three kinds of different improved methods. Namely, during the process of producing new solutions in solution transformation, firstly, three cities are randomly selected. Then, three different processing methods are given, respectively. Finally, in simulation, compared with the existing method, the results show that the proposed three methods have shorter paths and better results.

**Key words:** TSP; combinatorial optimization; Metropolis rule; stochastic relaxation method

TSP 又称为旅行售货员问题, 或货郎担问题, 是一个典型的组合优化问题, 也是 NP-hard 问题<sup>[1]</sup>. 它属于组合优化范畴, 具有组合优化问题的典型特征, 并且其描述简单, 因此许多学者将 TSP 作为公共实例来研究算法. 同时, 旅行商问题有着广泛的实际应用背景, 如物流配送, 调度排班, 道路交通, 计算机网络节点配置, 生产调度和组合优化求极值等等问题<sup>[2,3]</sup>. 所以, TSP 成为优化领域里的研究热点, 吸引了管理优化, 运筹学, 数学, 物理, 生物和人工智能等领域研究者的广泛关注. 可惜的是, 目前对它的求解还没有一个

特别有效的方法.

1953 年, 学者 Metropolis 等提出了随机松弛法, 又被称为模拟退火算法, 它是基于物理淬火过程的一种模拟学习规则, 是在设定的一个或者多个自变量范围内随机搜索, 寻找满足条件的最佳优化组合的算法<sup>[4]</sup>. 算法不易受到初始解的限制<sup>[5]</sup>, 通过赋予搜索过程一种时变且最终趋于零的概率突跳性, 从而可有效避免陷入局部极值并最终趋于全局最优. 但随机松弛算法每次只搜索一点并且不太了解整个搜索空间的状况, 因此难以判断哪些区域最有可能搜索出最优解, 从而

① 基金项目: 国家自然科学基金(61273127); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2014JM8325); 陕西省教育厅科研计划(14JK1538)

收稿时间: 2015-05-26; 收到修改稿时间: 2015-07-14

导致时间性能不好,并且算法对参数和退温条件的依赖性很强.近年来,对随机松弛法的研究得到了快速的发展,并且已被应用于各个领域<sup>[6]</sup>.

为了使算法在合适的参数设置下能够顺利地找到最优解,且能相应地降低算法的运行时间,改进模拟算法中考虑加入局部搜索的算法.本文首先对基本随机松弛法的过程进行了描述和分析.然后,在解变换产生新解的过程中,针对基本随机松弛法容易陷入局部极值的缺点,基于插入的局部搜索方法按以下步骤来实现:①针对当前解随机选择个体编码中的三个不同位置  $a$ 、 $b$ 、 $c$  ( $a < b < c$ ), 不改变它们的个体位置.以插到前面为例,第一种方法,将  $a$  和  $b$  之间的位置插入  $c$  之前,从而得到一个新的个体;第二种方法,将  $b$  和  $c$  之间的位置插入  $a$  之前,从而得到一个新的个体;第三种方法,将  $a$ 、 $b$ 、 $c$  依次插到最前面,从而得到一个新的个体.②对新个体进行解码计算,计算其调度适应值,如果优于插入前的旧个体,那么就用新的个体替换旧个体;③返回步骤①.以上各种局部搜索方法均设置一定的次数进行重复操作.最后,对比相应的算法,仿真结果说明文中所提三种方法均是可行的和有效的.

## 1 基本随机松弛法

基本随机松弛法(Basic Stochastic Relaxation Method, BSRM)是参照金属退火过程中的热力学变化趋势,在固定时间内寻求在大的搜寻空间内找到最优解的算法<sup>[7-10]</sup>.它来源于固体退火的原理,将固体加热至充分高,再让其慢慢冷却,加热时固体内部粒子随温度升高变为无序状,内能增大,而慢慢冷却时粒子逐渐趋于有序,在每个温度都达到平衡态,最后在常温时达到基态,内能减为最小.根据 Metropolis 准则,粒子在温度  $T$  时趋于平衡的概率为  $e^{-\Delta E/(kT)}$ , 其中  $E$  为温度  $T$  时的内能,  $\Delta E$  为其改变量,  $k$  为 Boltzmann 常数.用固体退火模拟组合优化问题,将内能  $E$  模拟为目标函数值  $f$ , 温度  $T$  演化成为控制参数  $T$ , 即得到解组合优化问题的 BSRM, 具体步骤如下:

(1) 设置初始温度  $T_0$ , 初始解  $x$ , 每个  $T$  值的迭代次数  $L$ .

(2) 对  $k=1,2,\dots,L$ , 每一个  $k$  值都执行(3)~(6);

(3) 对当前状态  $x$  随机扰动产生一个新解  $x'$ ;

(4) 计算增量  $\Delta f' = f(x') - f(x)$ , 其中  $f$  为目标函

数;

(5) 若  $\Delta f' < 0$ , 则接受  $x'$  作为新的当前解.否则,以概率  $e^{-\Delta f'/T}$  接受  $x'$  作为新的当前解;

(6) 如果满足终止条件(通常取为连续若干个新解都没有被接受),则输出当前的解作为最优解,结束程序.否则,执行(7);

(7)  $T$  逐渐地减少,  $T = T \cdot \alpha$ ,  $T \rightarrow 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha$  为衰减因子(或称为降温速率),然后,转到(2).

## 2 改进的随机松弛法求解TSP

TSP可以描述为:设有  $n$  个城市,分别用  $1,2,\dots,n$  来代表.城市  $i$  和城市  $j$  之间的距离为  $d(i,j)$ ,  $i,j=1,2,\dots,n$ . TSP是要找遍访每个城市恰好一次的一条回路,而且其路径总长度为最短.它的解的空间即就是遍访每个城市恰好一次的所有回路,并且是  $\{1,2,\dots,n\}$  的所有循环排列的集合.

本文算法采用了三种不同的改进的随机松弛法来改善算法的求解性能.应用本文改进的随机松弛法来求解TSP的步骤如下.

步骤 1. 设置控制参数:降温速率  $\alpha$ , 初始温度  $T_0$ , 结束温度  $T_{end}$  以及链长  $L$ .

步骤 2. 产生初始解:对于  $n$  个城市的 TSP 而言,初始解为  $1 \sim n$  的一个排序,这里采用随机排列的方式给出.

步骤 3. 解变换产生新解的过程:对当前解来进行变换,产生新的路径数组,一般典型的变换是用产生随机数的方法产生出将要交换的两个城市,接着用二邻域变换法产生新的路径.例如,  $n=10$  时,产生两个  $[1, 10]$  范围内的随机整数  $r_1$  和  $r_2$ , 确定出两个位置,然后将其位置对换,比如,当  $r_1=2$ ,  $r_2=7$  时,选择的初始解为

10 2 3 4 1 5 7 9 8 6

然后按二邻域变换法得到的新解为

10 7 3 4 1 5 2 9 8 6

这里,本文给出如下三种变换方法.

第一种方法,首先,随机选择出三个城市,然后,将前两个城市之间的城市插到第三个城市的前面或后面(注:这两个城市之间不包括第三个城市).比如,以插到前面为例,即就是,如果  $r_1=2$ ,  $r_2=7$ ,  $r_3=10$  时,选择出的初始解为

10 2 3 4 1 5 7 9 8 6

从而, 按该方法得到的新解为

10 2 7 9 8 3 4 1 5 6

第二种方法, 同样选择三个城市, 然后, 将后两个城市之间的城市插到第一个城市的前面或后面(注: 这两个城市之间不包括第三个城市). 比如, 以插到前面为例, 即就是, 如果  $r_1=2$ ,  $r_2=7$ ,  $r_3=10$  时, 选择出的初始解为

10 2 3 4 1 5 7 9 8 6

从而, 按该方法得到的新解为

10 9 8 2 3 4 1 5 7 6

第三种方法, 同样选择三个城市, 然后, 将三个城市依次插入到最前面或最后面. 比如, 以插到前面为例, 即就是, 如果  $r_1=2$ ,  $r_2=7$ ,  $r_3=10$  时, 选择出的初始解为

10 2 3 4 1 5 7 9 8 6

从而, 按此方法得到的新解为

2 7 6 10 3 4 1 5 9 8

步骤 4. Metropolis 准则: 如果路径长度为  $f(S)$  时, 则当前解的路径为  $f(S_1)$ , 新解的路径为  $f(S_2)$ , 路径差为  $df = f(S_2) - f(S_1)$ , 则 Metropolis 准则为

$$P = \begin{cases} 1, & df < 0 \\ \exp(-\frac{df}{T}), & df \geq 0 \end{cases}$$

如果  $df < 0$  时, 则以概率 1 接受新的路径; 否则, 以概率  $\exp(-df/T)$  接受新路径.

步骤 5. 降温: 利用降温速率  $\alpha$  进行降温, 即  $T = \alpha T$ , 若  $T$  小于结束温度时, 则停止迭代, 输出当前状态, 得出最优解; 否则, 需继续迭代.

### 3 仿真实验

为了说明本文所给方法的合理性, 现选择国际上通用的测试库 Oliver30<sup>[11]</sup>作为 TSP 的城市坐标, 如表 1 所示.

表 1 Oliver30 的坐标

序号	坐标	序号	坐标	序号	坐标	序号	坐标
1	x:41 y: 94	9	x:54 y:62	17	x:24 y:42	25	x:62 y:32
2	x: 37 y: 84	10	x:83 y:69	18	x:58 y:69	26	x:58 y: 35
3	x: 54 y:67	11	x:64 y:60	19	x:71 y:71	27	x:45 y:21

4	x:25 y:62	12	x:18 y:54	20	x:74 y:78	28	x: 41 y:26
5	x:7 y:64	13	x:22 y:60	21	x:87 y:76	29	x: 44 y:35
6	x: 2 y:99	14	x: 83 y:46	22	x:18 y:40	30	x: 4 y:50
7	x:68 y:58	15	x:91 y:38	23	x:13 y:40		
8	x:71 y:44	16	x:25 y:38	24	x:82 y:7		

首先, 随机选择种群中的一个初始路线, 然后, 利用本文所提的三种方法进行求解, 且算法参数值设置如表 2 所示.

利用文中所提的第一种方法进行求解时, 得到的随机路线, 优化过程和最优路线分别如图 1, 图 2 和图 3 所示.

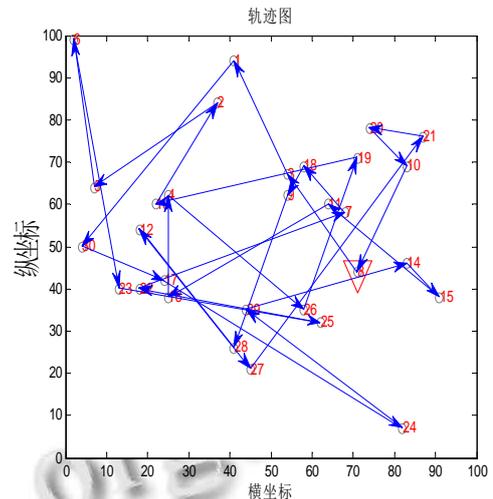


图 1 随机路线

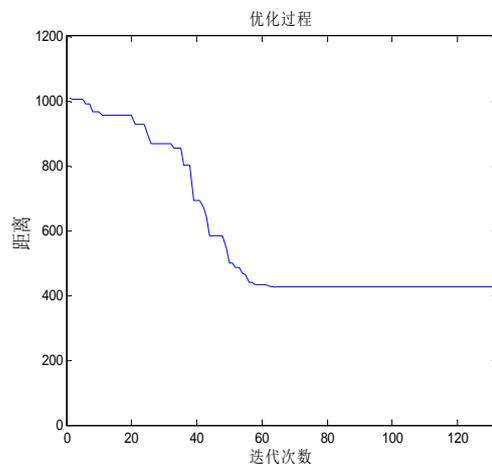


图 2 优化过程

表 2 算法参数值

控制参数	本文设定值	作用
参数 T 的初值 $T_0$	$T_0=1000$	停止准则, 控制外层循环的终止
参数 T 的终值 $T_{end}$	$T_{end}=0.001$	(1) 控制参数温度 T 下降到终止温度; (2) 目标函数值小于实际生产要求的限度值
参数 T 的衰减系数 $\alpha$	$\alpha=0.9$	$T_{i+1} = g(T_i) = \alpha T_i$ , $0 < \alpha < 1$ 为常数, 一般 $\alpha$ 值为 0.5~0.99
每个 T 值迭代次数 $L_k$	$L_k=200$	控制内存循环的终止

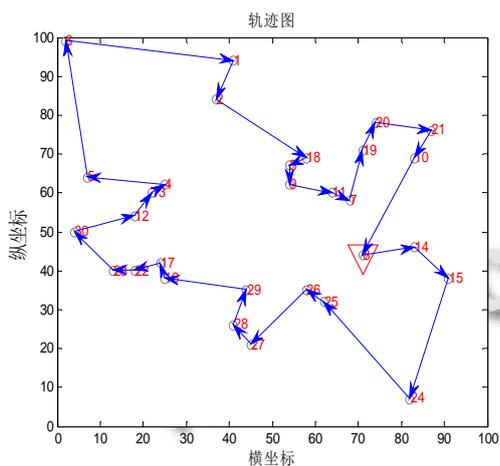


图 3 最优路线

这样, 得到的最优路线为 8→14→15→24→25→26→27→28→29→16→17→22→23→30→12→13→4→5→6→1→2→18→3→9→11→7→19→20→21→10→8. 此时, 最优路线的总距离为 420.6918.

利用文中所提的第二种方法进行求解时得到的随机路线, 优化过程和最优路线分别如图 4, 图 5 和图 6 所示.

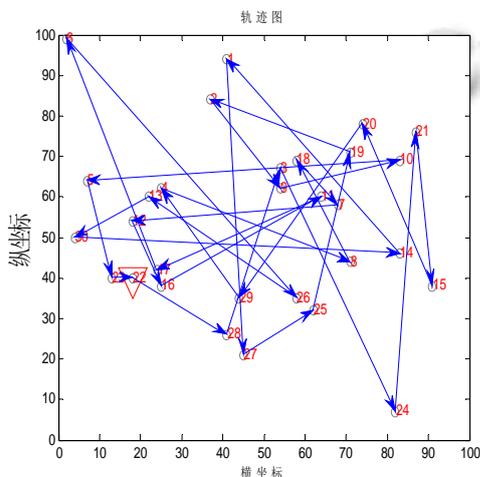


图 4 随机路线

这样, 得到的最优路线为 22→17→16→29→28→27→26→25→24→15→14→8→7→11→9→3→18→19→10→21→20→1→2→6→5→4→13→12→30→23→22. 此时, 最优路线的总距离为 420.2667.

利用文中所提的第三种方法进行求解时得到的随机路线, 优化过程和最优路线分别如图 7, 图 8 和图 9 所示.

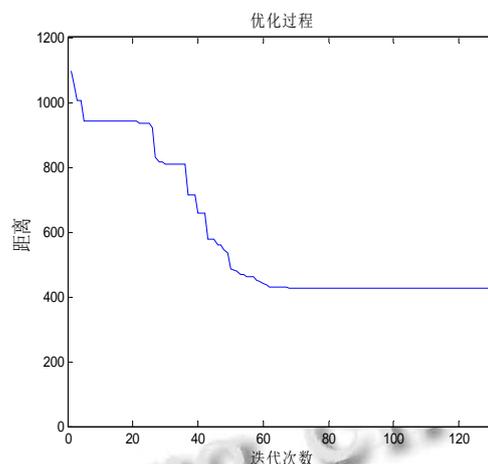


图 5 优化过程

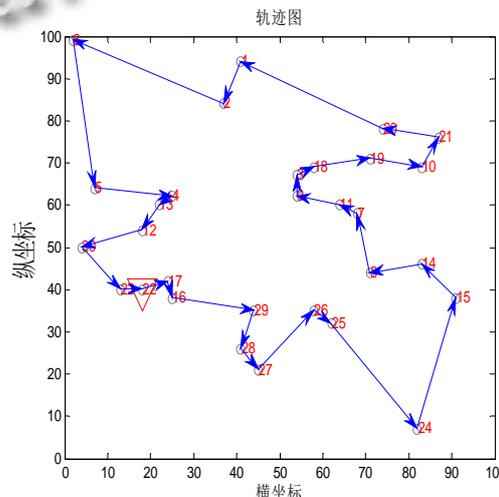


图 6 最优路线

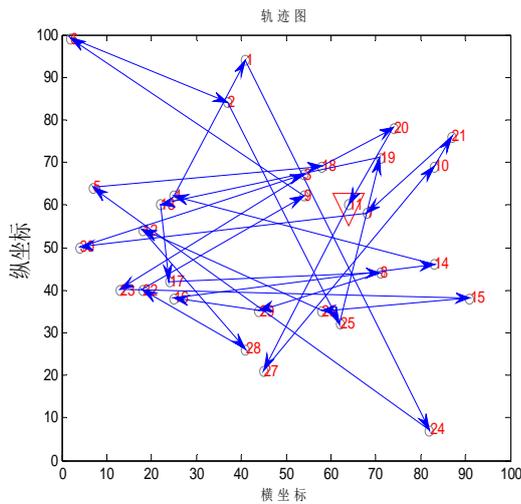


图 7 随机路线

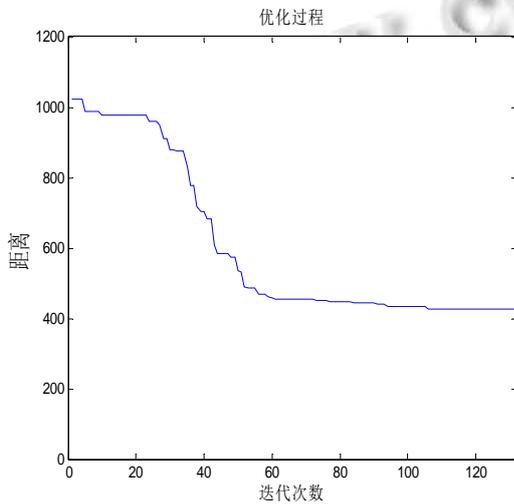


图 8 优化过程

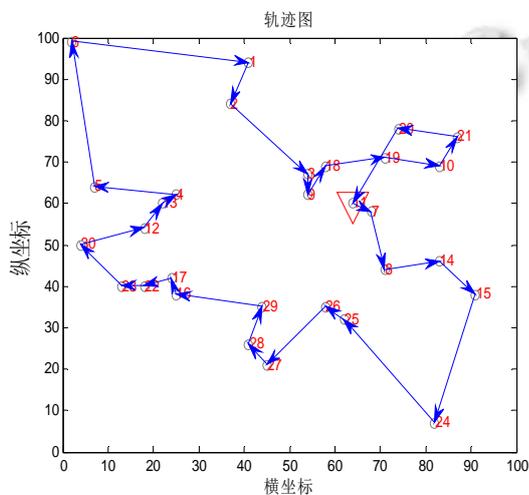


图 9 最优路线

这样,得到的最优路线为 11→7→8→14→15→24→25→26→27→28→29→16→17→22→23→30→12→13→4→5→6→1→2→3→9→18→19→10→21→20→11. 此时,最优路线的总距离为 419.8578.

利用文中所提的三种方法分别进行 100 次求解后,其结果的最差解,最好解和平均值均罗列在表 3 中.再分别利用基本随机松弛法(Basic Stochastic Relaxation Method, BSRM),文献[12]中的遗传算法(Genetic Algorithm, GA)和文献[13]中的蚁群算法(Ant Colony Algorithm, ACA)对上问题进行 100 次求解,将结果的最差解,最好解和平均值仍罗列在表 3 中.

表 3 对 Oliver30 的 100 次求解结果

算法	最差解	最好解	平均值
第一种方法	35261	33522	33792
第二种方法	35081	33784	33975
第三种方法	34978	33972	33826
BSRM	40536	34958	35176
GA	42458	38541	38732
ACA	36351	34611	34679

为了进一步说明本文所给方法的有效性,以下讨论当城市个数增加时的情形.为此,选择国际上通用的测试库 Att48 作为城市坐标,分别利用上面涉及的方法进行 100 次求解后,其结果的最差解,最好解和平均值均罗列在表 4 中.

表 4 对 Att48 的 100 次求解结果

算法	最差解	最好解	平均值
第一种方法	431	420	423
第二种方法	431	420	424
第三种方法	431	420	421
BSRM	476	424	433
GA	489	422	456
ACA	440	421	432

从以上试验结果可以看出,在求解 TSP 的过程中,本文所提三种算法均具有较好的发现较好解的能力.而且从其平均值可以看出本文所提方法也具有较好的稳定性.

#### 4 结语

本文在讨论了基本随机松弛算法的基本原理基础上,针对基本随机松弛算法在求解 TSP 时存在容易陷入局部极值的缺点,进行了相应的改进.即就是说,在求解 TSP 的过程中,提出了三种不同的改进方法.仿

真结果充分显示了本文所提方法均是合理的和可行的。

### 参考文献

- 1 Applegate DL, Bixby RE, Chvatal V, Cook WJ. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton: Princeton University Press, 2011.
- 2 余详宜,崔国华,邹海明. 计算机算法基础. 第2版. 武汉:华中科技大学出版社,1998.
- 3 黄可伟,汪定伟. 热轧计划中的多旅行商问题及其计算方法. 计算机应用研究,2007,24(7):43-45.
- 4 Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH, Teller E. Equation of state calculation by fast computing machines. The Journal of Chemical Physics, 1953, 21 (6): 1087-1099.
- 5 Ceschia S, Gaspero LD, Schaerf A. Design, engineering, and experimental analysis of a simulated annealing approach to the post enrolment course timetabling problem. Computers & Operations Research, 2012, 39(7): 1615-1624.
- 6 李金忠,夏洁武,曾小荟,曾劲涛,刘新明,冷明,孙凌宇. 多目标模拟退火算法及其应用研究进展. 计算机工程与科学,2013,35(8):77-88.
- 7 Naderi B, Zadien M, Balagh AKG, Roshanaei V. An improved simulated annealing for hybrid flow shops with sequence dependent setup and transportation times to minimize total completion time and total tardiness. Expert Systems with Applications, 2009, 36 (6): 9625-9633.
- 7 Precup RE, Preitl S. Fuzzy control systems with reduced parametric sensitivity based on simulated annealing. IEEE Trans. on Industrial Electronics, 2012, 59(8): 3049-3061.
- 8 王健,关添,叶大田. 基于特征比较和模拟退火—遗传算法的普通话音素评分模型. 清华大学学报(自然科学版),2012,52 (6):880-884.
- 9 杨达莉,文学,刘健. 模拟退火算法在汽轮机转子动叶排序优化技术中的应用. 东方汽轮机,2014,(2): 29-33.
- 10 李士勇. 蚁群算法及其应用. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2004.
- 11 牟衍臣,谢东来,闫威,聂晶,李想. 基于遗传算法航路规划 TSP 问题的研究. 系统仿真学报,2013,25 (S):86-89.
- 12 赵俊生. 求解 TSP 问题的新型量子-蚁群算法. 自动化与仪器仪表,2013,(4):193-195.