

基于随机抽样一致性的特征匹配研究进展^①



李松原^{1,2}, 李德祥^{1,2}, 叶佳庆^{1,2}, 边小勇^{1,2}, 鲍海州^{1,2}, 喻国荣^{1,2}

¹(武汉科技大学 计算机科学与技术学院, 武汉 430081)

²(武汉科技大学 智能信息处理与实时工业系统湖北省重点实验室, 武汉 430081)

通信作者: 喻国荣, E-mail: yuguorong190@wust.edu.cn

摘 要: 随机抽样一致性 (RANSAC) 算法是一种经典的参数估计方法, 常用于影像匹配、影像拼接、三维重建等计算机视觉任务. 算法首先通过随机抽样最小样本集生成假设, 然后基于此样本集拟合并评价模型参数, 迭代上述步骤, 直到满足迭代停止条件, 迭代过程中最优拟合模型即为输出结果. 随机抽样一致性算法在处理仅含单模型的数据集时效果显著, 但是模型拟合的速率受采样过程影响, 且模型精度受模型估计子制约. 为推进随机抽样一致性技术的发展, 本文对当前主流的随机抽样一致性算法进行了梳理、分析、介绍和总结. 以改进思路为分类标准对现有文献进行整理: 假设生成时, 通过只采样高质量点或添加几何约束等方法, 提升采样质量; 模型精化时, 聚合多模型或结合局部优化等方法调整模型参数; 假设验证时, 构建预筛选机制减少错误模型的验证, 降低计算开销. RANSAC 的很多变体通过修改这些细节来提高计算速度和鲁棒性. 本文详细介绍了 RANSAC 及其各个变体的实现原理, 并在公共的数据集上对它们的性能进行定量与定性实验分析, 给出了它们的综合性能评价.

关键词: 随机抽样一致性算法; 估计子; 假设检验; 模型估计

引用格式: 李松原, 李德祥, 叶佳庆, 边小勇, 鲍海州, 喻国荣. 基于随机抽样一致性的特征匹配研究进展. 计算机系统应用, 2025, 34(10): 16-31. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/9979.html>

Research and Development of Feature Matching Based on Random Sample Consensus

LI Song-Yuan^{1,2}, LI De-Xiang^{1,2}, YE Jia-Qing^{1,2}, BIAN Xiao-Yong^{1,2}, BAO Hai-Zhou^{1,2}, YU Guo-Rong^{1,2}

¹(School of Computer Science and Technology, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

²(Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Information Processing and Real-time Industrial System, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: The random sample consensus (RANSAC) algorithm is a classical parameter estimation method widely applied in computer vision tasks such as image matching, image stitching, and 3D reconstruction. Hypotheses are first generated by randomly sampling a minimal subset of data points, followed by model fitting and parameter evaluation based on the sampled subset. These steps are iteratively repeated until the stop criterion is satisfied, with the optimal model obtained during the process being selected as the final output. RANSAC demonstrates strong performance when handling datasets containing a single model. However, its fitting speed is influenced by the sampling strategy, and its estimation accuracy is constrained by the underlying model estimator. To advance the development of RANSAC techniques, this study provides a comprehensive review, analysis, and summary of main stream RANSAC variants. The existing methods are classified based on their respective improvement strategies. During hypothesis generation, the sampling quality is enhanced by selecting high-quality points or incorporating geometric constraints. During model refinement, parameter accuracy is improved by aggregating multiple models or integrating local optimization techniques. During hypothesis verification,

① 基金项目: 湖北省教育厅科学研究计划 (B2023012)

收稿时间: 2025-03-11; 修改时间: 2025-03-31; 采用时间: 2025-05-06; csa 在线出版时间: 2025-09-03

CNKI 网络首发时间: 2025-09-04

pre-screening mechanisms are introduced to filter out incorrect hypotheses, thus reducing computational overhead. Numerous RANSAC variants achieve increased computational efficiency and robustness through such modifications. This study details the implementation principles of RANSAC and its variants and conducts both quantitative and qualitative performance evaluations on public datasets to assess their overall effectiveness.

Key words: random sample consensus (RANSAC) algorithm; estimator; hypothesis testing; model estimation

随机抽样一致性 (random sample consensus, RANSAC) 算法^[1]是一种经典的模型参数估计方法, 常用于影像匹配、影像拼接、影像融合、三维重建等计算机视觉任务. 传统的最小二乘法依赖全部数据拟合模型, 易受噪声和异常值干扰, 导致结果出现偏差. 而 RANSAC 通过随机选取最小样本集生成候选模型, 迭代验证模型支持度, 动态筛选内点并更新最优解. 这种“假设-验证”机制能有效剔除离群点, 在含噪声的数据中仍能保持模型准确性. 作为经典、可靠的模型估计算法, RANSAC 广泛应用于各个领域, 尤其是在特征匹配中发挥着重要作用, 常用于多视影像的几何变换模型估计与粗差剔除, 其模型估计性能将直接影响后续影像拼接、三维重建等过程的精度.

本文对 RANSAC 在特征匹配中的应用进行详细阐述, 重点梳理各类改进方法的基本思想及改进之处, 分析现有 RANSAC 改进方法存在的局限性及面临的挑战, 并对未来的研究方向进行展望.

1 改进分类

本文将 RANSAC 的变体按照改进思路大致分为 3 类: 改进假设生成过程的方法, 改进模型精化过程的方法, 改进假设验证过程的方法.

第 1 类思路通过改进假设生成的过程来提高算法的效率, 这也是早期大多数学者针对 RANSAC 方法的改进方向. 2005 年, Chum 等人^[2]提出的逐步采样一致性算法 (progressive sample consensus, PROSAC) 通过定义质量函数对特征匹配中每一对特征点进行排序, 从而优先选择高质量点对构建假设模型. PROSAC 利用匹配点的优先级信息, 有效降低了粗差点的影响, 缩短了迭代次数, 加速了找到最优模型的过程. Myatt 等人^[3]提出的 N 邻近点样本一致性算法 (N-adjacent point sample consensus, NAPSAC) 通过随机选取一个初始点并在其周围构造一个超球体, 从超球体内选择相邻点形成样本子集, 以此提高了内点被采样的概率. NAPSAC

利用了几何邻接性假设, 假定内点在局部空间中分布更密集, 从而在高维数据集下有效提升了模型估计的准确性. Tordoff 等人^[4]提出的引导式最大似然估计样本一致性算法 (guided maximum likelihood estimation sample consensus, Guided-MLESAC) 通过利用图像变换中的匹配先验信息来引导采样过程, 并结合最小二乘估计以优化模型拟合效果. Rodehorst 等人^[5]提出的遗传算法样本共识 (genetic algorithm sample consensus, GASAC) 将遗传算法引入 RANSAC 框架, 通过模拟自然选择的进化过程优化采样策略, 这种进化式的采样机制有效地提升了内点的采样概率, 加速了最优模型的收敛. Brachmann 等人^[6]提出神经引导的随机抽样一致性算法 (neural-guided random sample consensus, NG-RANSAC) 通过引入神经网络, 学习数据中的特征分布, 优化了 RANSAC 的采样过程. 该方法利用神经网络对匹配点的内点概率进行预测, 进而指导采样策略, 使得高内点概率的样本被优先选中. 叶锦华等人^[7]提出通过 DBSCAN 算法改进 RANSAC 的初始点选择策略, 并引入法向量夹角约束优化内点判定准则, 提升了含噪声点云的平面拟合精度. 车德福等人^[8]提出了通过射线扫描获取有序轮廓点集, 并改进 RANSAC 的初始抽样策略, 同时引入最小二乘拟合和近似直线合并, 提升了直角建筑物轮廓提取的效率与准确性. 许可可等人^[9]提出基于结构相似的 RANSAC 改进算法. 该算法采用 BRISK (binary robust invariant scalable keypoints) 算法提取和描述二进制特征点, 用 Hamming 距离进行特征匹配, 借助结构相似性约束剔除误匹配点, 明显减少算法迭代次数, 提高了算法效率. Fotouhi 等人^[10]提出的基于空间一致性的 RANSAC 算法引入空间一致性约束, 利用高置信度基准点计算特征点间的距离比例, 并通过投票机制剔除明显外点, 提升了初始数据集的内点率, 减少了无效迭代次数, 在保持精度的同时将运行时间缩短约 50%, 尤其适用于低内点率场景下的几何模型估计. 王可等人^[11]提出了基于全概率更

新的改进 RANSAC 算法 (total probability updated RANSAC, TPSAC). 该算法利用混合分布模型获取测试样本点的初始概率估计, 基于全概率公式建立评价准则更新样本概率, 采用逆变映射作为采样策略, 提高内点抽样概率, 加快算法收敛速度, 从而更高效地获取准确的模型参数. 樊彦国等人^[12]提出了基于 ORB 与 RANSAC 融合改进的图像配准算法. 在 ORB 特征提取阶段, 采用改进 Harris 算子检测特征点, 构建简化金字塔尺度空间模型, 并用梯度方向直方图计算主方向; 通过构建分块随机取样检测的方式改进了 RANSAC, 利用多区域特征点组合估计变换模型参数. 该方法在尺度和旋转配准精度得到显著提升. 江洁等人^[13]提出了一种投票式并行 RANSAC 算法. 该算法在假设生成阶段通过并行采样同时生成多个模型, 让多个模型并行对同一个数据点投票, 直接判断其是否属于局内点, 省去了传统方法中根据最佳模型重新筛选数据点的步骤. 王亚伟等人^[14]提出了多变换矩阵 mRANSAC (multi-RANSAC) 算法. 该算法使用多变换矩阵增加匹配点数, 通过并集法、减集法和自适应内点数阈值法 3 种策略保留多个正确匹配点集, 显著提升匹配点提纯效率. 结果表明, mRANSAC 提纯结果比 RANSAC 方法多出 60%–300%. 总而言之, 基于假设生成过程的改进方法可凝练为 3 类核心策略: (1) 先验规则引导的确定性采样: 通过特征质量排序、几何邻域筛选、空间一致性约束或领域知识构建确定性规则, 优先选择高置信度样本, 直接提升内点采样概率, 降低迭代次数; (2) 智能优化与概率驱动: 引入遗传算法、神经网络等智能方法动态优化采样路径, 或通过全概率更新建立概率模型, 实现数据驱动的自适应收敛; (3) 并行化与多假设协同: 采用并行投票或多变换矩阵协同生成多模型假设, 通过并行验证或协同提纯的方法扩大有效匹配点集.

第 2 类思路中, 由于原始的 RANSAC 算法通过最小二乘获取模型参数, 最终结果易受到噪声的干扰, 许多学者通过优化模型估计过程来提高精度和鲁棒性. Torr 等人^[15]本文提出一种基于 3 幅图像三焦点张量的最大似然估计算法, 该方法通过六点对应初始化、参数化约束以及结合 RANSAC 鲁棒估计与最大似然优化的迭代策略, 有效剔除误匹配并精确估计张量参数. 实验结果在合成数据和真实场景图像上验证了算法的鲁棒性与准确性. Torr 等人^[16]提出的最大似然估计

样本一致性算法 (maximum likelihood estimation sample consensus, MLESAC) 通过将极大似然估计引入 RANSAC 框架, 对模型的内点进行优化评估. MLESAC 通过最大化模型的似然函数来区分内点和外点, 减少了外点对模型拟合的干扰, 显著提高了模型估计质量和鲁棒性. Baráth 等人^[17]提出的边际化样本共识++算法 (margizing sample consensus++, MAGSAC++) 通过高效的计算策略和更强的稳健性, 显著提高了大规模粗差数据集的估计精度和计算速度. MAGSAC++优化了内点的选取策略, 并使用更高效的样本采集方式, 面对大规模粗差时有效提高计算效率. Korman 等人^[18]提出的潜在随机抽样一致性算法 (latent random sample consensus, Latent RANSAC) 引入潜在变量模型, 并通过合理的假设验证机制增强了 RANSAC 在复杂数据中的鲁棒性. 该方法能够有效应对具有多种数据分布的场景, 尤其在处理具有潜在结构或隐藏模式的数据时表现出更强的适应性. Chum 等人^[19]提出的局部优化随机抽样一致性算法 (locally optimized RANSAC, LO-RANSAC) 在每次假设验证后, 使用局部优化策略进一步精细调整模型参数, 减少了由于粗差或不完全匹配所带来的影响, 能够在提升鲁棒性的同时加速模型的估计过程. Le 等人^[20]提出的几何约束样本一致性算法 (geometrically constrained sample consensus, GCSAC) 通过引入几何约束来改进样本选择和模型估计的精度. GCSAC 能够在处理复杂的多模态数据时, 更加精确地选择符合几何约束的点对, 减少粗差对模型估计的干扰, 提高了估计精度和计算效率. Niedfeldt 等人^[21]提出的递归随机抽样一致性算法 (recursive random sample consensus, Recursive RANSAC) 采用递归策略处理多信号参数. 通过逐层细化对信号模型的估计, Recursive RANSAC 能够在多信号场景中有效处理不同参数集合的组合, 避免了传统 RANSAC 在多信号情况下的退化问题. Cohen 等人^[22]提出的似然比检验样本共识算法 (likelihood ratio test sample consensus, LRTSAC) 结合了似然比检验来联合优化模型参数和噪声水平. LRTSAC 通过评估模型的似然比, 能够更加精准地识别内点, 提高了估计的可靠性和精度. 夏克付等人^[23]通过几何约束剔除初始匹配中的误匹配点, 并在模型精化阶段引入 LM 算法迭代优化单应矩阵, 将单应矩阵估计精度提升至 99% 以上, 匹配效率提高约 17%. 张红民等人^[24]提出改进的相邻概率 RANSAC 算法, 通过自适

应调整内点采样概率,结合模型评价函数估计出临时模型并得到临时内点集,再根据内点相邻原则筛选部分内点进行重采样,最后采用预检验技术得到最佳模型参数.该算法有效减少迭代次数,从而提高了算法效率.总而言之,基于模型精化过程的改进方法可凝练为3类核心策略:(1)概率优化与迭代调参,通过概率建模与梯度迭代细化模型参数,显著降低噪声敏感性;(2)结构约束与分层处理,引入几何约束筛选合理点集,结合递归框架分层解耦多目标参数,避免多模态数据下的模型退化;(3)采用边际化采样、自适应概率调整等策略,减少冗余迭代,提高算法效率.

最后一类思路是通过优化假设检验步骤,提高算法的效率. Matas 等人^[25]提出的带有 $T_{d,d}$ 测试的随机化 RANSAC 算法 (randomized RANSAC with $T_{d,d}$ test, RRANSAC- $T_{d,d}$) 通过引入 $T_{d,d}$ 测试来进行初步的假设验证,能够在早期阶段筛选出不合格的模型,减少不必要的计算和迭代次数. Capel 等人^[26]提出的带有 Bail-Out 测试的随机化 RANSAC 算法 (randomized RANSAC with Bail-Out test, RRANSAC-BO) 在传统 RANSAC 的基础上引入了一个早期跳出机制. 这个机制通过对当前假设的评估,在检测到某些条件不满足时(例如内点数量不足或模型不稳定),提前终止当前的假设验证,从而减少计算时间. Matas 等人^[27]提出的带有序贯概率比检验的随机化 RANSAC 算法 (randomized RANSAC with sequential probability ratio test, RRANSAC-SPRT) 通过序贯概率比检验来优化假设验证过程. SPRT 通过动态评估每个假设的概率,在逐步生成样本的过程中,实时判断假设是否有效,避免无效假设的计算和冗余的假设验证. 范帅鑫等人^[28]借助重投影误差和相对判别法选择高质量内点,并采用二分法动态调整阈值优化本质矩阵筛选,显著提升了单目系统大尺寸测量中本质矩阵求解的稳定性与精度. 杨永刚等人^[29]通过光流法与特征点融合提供初始位姿假设,并在假设验证阶段采用动态阈值筛选结合最小二乘迭代优化剔除误匹配点,最终通过卡尔曼滤波融合多源数据提升模型质量,显著提升了无人机视觉 SLAM 的定位精度与实时性. 李云帆等人^[30]提出浮动一致集阈值的 RANSAC 算法. 其通过几何级数收缩阈值,优先提取大平面后逐步检测小面片,避免固定阈值导致的过分割与欠分割问题. Moisan 等人^[31]提出基于反证法的随机抽样一致性算法 (a contrario RANSAC, AC-RANSAC), 引入 a

contrario 准则自动确定内外点阈值,替代传统固定阈值,并仅从当前最佳模型的内点中采样,在高外点率场景中仍能保持高精度. Wei 等人^[32]提出了广义可微分随机样本一致性算法 (generalized differentiable RANSAC, ∇ -RANSAC). ∇ -RANSAC 通过引入可微组件、Gumbel Softmax 采样器和可训练质量函数,实现了对 RANSAC 全流程的可微化改造. 该算法利用梯度传播机制优化采样分布,将学习目标从最佳模型选择转向最小化随机样本的期望损失,结合姿态误差与对极误差等多指标损失函数,显著提升了精度与效率,同时保持了与传统方法相近的运行速度. 周骏等人^[33]提出了基于序贯概率及局部优化随机抽样一致性算法. 该算法在模型检验阶段利用序贯概率检测技术,随机抽取少量数据对模型参数预检验,对通过预检验的模型才使用全部数据检验;在模型参数估计时,采用局部优化方法提升模型估计精确度. 相较于标准 RANSAC 取得了较大的提升. 孙雪强等人^[34]提出一种改进的随机抽样一致性算法. 该算法计算所有初始匹配点对的欧氏距离,按距离升序排序后,选取前 80% 的匹配点对构成新样本集,提高内点比例. 并引入预检验快速舍弃不合理模型. 实验结果表明,该算法提高了图像匹配的精度和效率. 总而言之,针对假设验证过程的改进方法可归纳为 3 类核心策略:(1)动态阈值与预检验优化,通过浮动阈值、自动阈值确定或样本预筛选动态调整验证标准,避免固定阈值的过分割(或欠分割)问题,提升模型稳定性;(2)序贯验证与早期终止,利用序贯概率比检验、 $T_{d,d}$ 测试及 Bail-Out 机制实现渐进式假设评估,通过动态截断无效计算,显著加速验证流程;(3)可微化与梯度驱动优化,以 ∇ -RANSAC 为代表,通过可微组件与梯度传播机制将传统 RANSAC 改造为可训练框架,结合多指标损失函数优化采样分布,在保持实时性的同时提升精度.

本文根据 RANSAC 算法不同的改进思路,全面系统地阐述主流随机抽样一致性算法的研究进展,以方便研究人员能够更好地了解随机抽样一致性算法的研究现状. 部分 RANSAC 改进算法的归纳总结见表 1,由于 RANSAC 变体过多,因此不可能将其全部列出,本文尽最大努力呈现常见的、经典的与新颖的研究成果. 本文内容组织如下:标准 RANSAC 方法在第 2 节中说明. 标准 RANSAC 的变体将在第 3 节中讨论. 部分 RANSAC 变体的实验对比在第 4 节中呈现.

表1 RANSAC 改进算法的归纳总结

方法类型	代表算法	核心思想/结论
基于假设生成	NAPSAC (Myatt等人 ^[3] , 2002)	利用空间邻域关系, 在超球体内选取邻接数据点, 提高内点采样概率, 适用于高维数据.
	PROSAC (Chum等人 ^[2] , 2005)	基于数据点质量排序的非均匀采样, 优先选择高质量点构建模型假设, 提升计算效率.
	Guided-MLESAC (Tordoff等人 ^[4] , 2005)	在采样阶段引入引导信息优先选择更有可能是内点的样本, 提高采样效率.
	GASAC (Rodehorst等人 ^[5] , 2006)	引入遗传算法, 通过遗传算法的交叉、变异操作在复杂的模型参数空间中进行全局搜索加速最优模型的收敛.
	SC-RANSAC (Fotouhi等人 ^[10] , 2019)	引入空间一致性约束, 通过投票机制剔除明显外点, 提升初始内点率, 提高整体运行效率.
	NG-RANSAC (Brachmann等人 ^[6] , 2019)	利用神经网络学习数据的分布特征, 预测每个数据点构建正确模型的概率, 指导采样过程.
模型精化	MLESAC (Torr等人 ^[16] , 2000)	基于数据概率分布假设, 计算内点概率构建似然函数并最大化确定最优参数.
	LO-RANSAC (Chum等人 ^[19] , 2003)	基于初始模型内点, 迭代优化模型参数, 加速模型的估计.
	AP-RANSAC (张红民等人 ^[24] , 2013)	对临时内点集依据内点相邻原则筛选部分内点进行重采样, 有效减少了迭代次数.
	LRTSAC (Cohen等人 ^[22] , 2015)	引入似然比检验来联合优化模型参数和噪声水平, 提高了估计的可靠性和精度.
	GCSAC (Le等人 ^[20] , 2018)	引入几何约束来提升样本选择和模型估计的精度.
	Latent RANSAC (Korman等人 ^[18] , 2018)	能够在恒定时间区间内估计模型, 与数据集规模无关
基于假设验证	MSGSAC++ (Baráth等人 ^[17] , 2020)	引入新的模型质量评分函数, 并提出Progressive NAPSAC采样器
	RRANSAC- $T_{d,d}$ (Matas等人 ^[25] , 2004)	通过随机选点初步测试模型, 早期排除劣质假设, 减少验证次数.
	RRANSAC-BO (Capel ^[26] , 2005)	定义早期跳出条件: 若当前假设得分无法超越历史最佳, 则提前终止验证.
	RRANSAC-SPRT (Matas等人 ^[27] , 2005)	基于序贯概率比检验通过似然比动态判断模型有效性, 无需内点比例先验知识.
	AC-RANSAC (Moisan等人 ^[31] , 2012)	引入反证法准则自动确定阈值, 仅从当前最佳模型的内点中采样.
	∇ -RANSAC (Wei等人 ^[32] , 2023)	∇ -RANSAC达成全流程可微化, 优化采样与学习目标, 显著提升模型精度与效率.

2 RANSAC

RANSAC 是一种在数据存在噪声和少量异常值的情况下, 用于模型参数估计的常见算法. 其基本假设是: 数据由“内点”和“外点”构成, 仅内点满足数据中所包含的模型. 该方法从一组包含“外点”的数据集中, 通过不断迭代来估计模型的最优参数. 该算法优点在于过程简单, 具有较强的鲁棒性. RANSAC 的算法流程见算法 1. RANSAC 算法拟合数据的效果见图 1.

算法 1. RANSAC

输入: 对应点数量为 N 的集合 \mathcal{U} ; 置信度 η ; 最大迭代次数 k_{\max} ; 阈值 τ .
输出: 最优模型参数 θ_{\max} ; 最终内点集 I^* .

```

 $k=0, I_{\max}=0; // I_{\max}$  是最大内点数
while  $k < k_{\max}$  do  $// k_{\max}$  是最大迭代次数
    从数据集中随机采样一个大小为  $m$  的最小子集
    使用这个最小子集估计模型参数  $\theta_k$ 
    计算当前假设模型的内点集  $I_k$ 
    if  $|I_k| > I_{\max}$  then
         $\theta_{\max} = \theta_k, I^* = I_k$ 
        根据式 (6) 更新最大迭代次数  $k_{\max}$ 
    end if
     $k = k + 1$ 
end while

```

在图像匹配过程中, 由于图像噪声、遮挡以及特征描述不准确等因素影响, 不可避免地会产生正确匹配与错误匹配. 在实际应用场景中, RANSAC 算法通常

借助基本矩阵或单应矩阵来表示两幅图像之间的几何变换模型. 对于该模型, RANSAC 通过随机采样最小数据集的方式来估计模型参数. 最终, 在返回的最优模型所对应的点集中, 那些残差超过设定阈值的数据点被判定为“外点”, 而这些“外点”即为图像匹配中的错误匹配点. RANSAC 的目的是找到最优模型参数, 可以表示为最大化某个目标函数 C . 在参数空间中, 重复选择最小数据点数量的随机子集并根据每个子集生成模型假设, 然后使用剩余数据点对每个假设模型进行验证并给出模型的评分, 返回得分最高的假设作为解决方案. RANSAC 流程图见图 2.

给定一个具有参数 θ 的未知变换 ϕ 以及由 N 个样本组成的一对数据集 X_i, Y_i , RANSAC 计算:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^N \rho(d(\phi_{\theta}(X_i), Y_i)) \quad (1)$$

其中, $d(\cdot, \cdot)$ 表示 L_2 距离, 具体如下 (n 为坐标维度):

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2} \quad (2)$$

成本函数 $\rho(\cdot)$ 在第 2.1 节中介绍.

2.1 目标函数

在标准 RANSAC 框架下, 要最大化的目标函数

C 被定义为给定模型的支持度. 具体来说, 给定参数 θ_k 的模型, 其支持度被界定为来自数据集 \mathcal{U} 中残差小于某一预定义阈值 t 的数据点的数量. 通过对残差的约束来筛选出与模型高度一致的数据点, 以此衡量模型的有效性和可靠性, 而 RANSAC 算法的核心目标为找到能使支持度最大化的模型参数. 因此, 模型的支持度 C 被定义为:

$$C = \sum_i \rho(e_i) \quad (3)$$

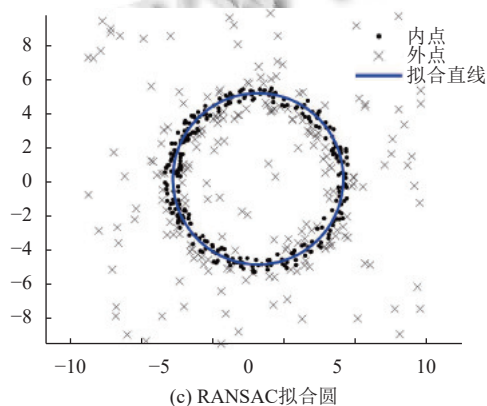
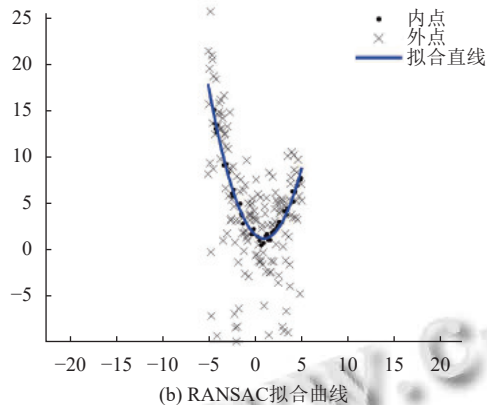
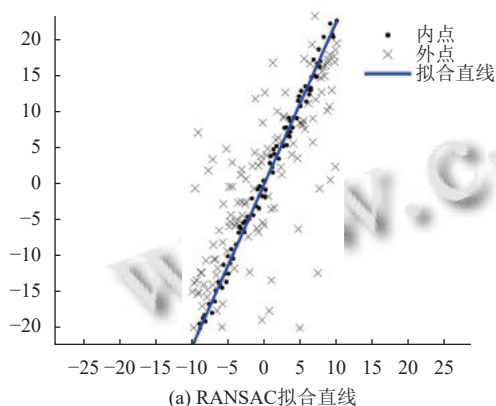


图1 RANSAC 算法拟合数据的效果

成本函数 $\rho(\cdot)$ 被定义为:

$$\rho(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{for } |e_i| \leq t \\ 0, & \text{for } |e_i| > t \end{cases} \quad (4)$$

其中, e_i 可被定义为第 i 对对应点在特定几何变换(如单应性变换)下的重投影误差. 详细来说, 设第 i 对对应点在原始空间中的坐标为 $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, 其在经过几何变换后, 得到在另一幅图像平面中的预测坐标 $\hat{p}_i = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$, 实际观测坐标为 $p'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$, 则残差 $e_i = d(p'_i, \hat{p}_i)$, 可得:

$$e_i = \sqrt{(x'_i - \hat{x}_i)^2 + (y'_i - \hat{y}_i)^2 + (z'_i - \hat{z}_i)^2} \quad (5)$$

式(5)可精确衡量对应点在经过模型变换后的预测位置与实际观测位置之间的偏差程度, 进而在 RANSAC 算法迭代过程中, 通过最小化所有对应点的残差之和或其他基于残差的目标函数来优化模型参数.

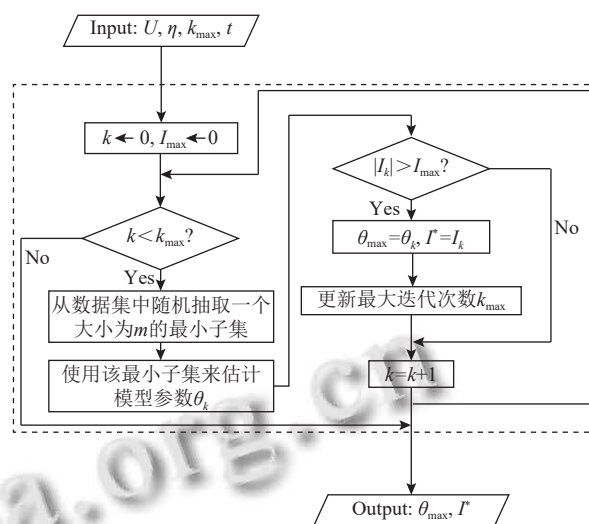


图2 RANSAC 流程图

2.2 子集大小

最小二乘法等传统回归方法是基于所有数据点进行计算. 它们假设数据集中的大部分点都符合某种数学模型, 通过最小化所有数据点到模型的误差之和来确定模型参数. 这种方法在数据相对干净、异常值较少的情况下能够得到较好的结果. 然而, 当数据集中存在大量异常值时, 异常值会对模型产生较大的偏差, 使模型偏离真实情况, 因为它们对误差计算的贡献与正常数据点相同, 从而影响模型的准确性和可靠性.

RANSAC 则采取了不同的策略. 它不依赖于所有数据, 而是通过随机采样最小样本子集来假设模型. 在每次迭代中, 只关注这些样本子集能否代表真实模型,

不被异常值所干扰。例如,在图像特征匹配中,如果存在一些错误匹配的特征点,传统回归方法可能会因为这些异常值而得到错误的匹配模型,而 RANSAC 通过随机抽样,有可能避开异常值,找到正确的匹配模型。这种策略使得 RANSAC 在异常值较多的情况下具有较强的鲁棒性。

RANSAC 的目标是抽取未受污染(即不包含异常值)的样本。在有异常值的数据集中,抽取到受污染样本的概率会随着样本大小的增加而呈指数增长。如果样本过大,其中包含异常值的可能性就会大大增加,从而导致估计出的模型参数不准确。相反,选择尽可能小的样本子集,虽然可能无法完全代表整个数据集,但可以降低包含异常值的概率,更有可能找到符合真实模型的数据子集,从而提高模型估计的准确性。每个子集的大小是由能够唯一计算模型参数所需的最少数据点数量决定的。例如,基本矩阵是一个 3×3 的矩阵,且具有秩为 2 的特性。在齐次坐标下,它将一幅图像中的点映射到另一幅图像中的对应极线。由于其特殊的几何性质,基本矩阵有 7 个自由度,需要 7 对对应点来求解,即 $m = 7$ 。

2.3 停止准则

在给定对应点数量为 N 的集合 \mathcal{U} 中,随机采取大小为 m 的最小子集。随后用最小子集生成模型假设,与 \mathcal{U} 中所有点进行验证以确定其支持度,即符合模型的点数量。重复上述步骤,直至满足终止条件。

标准终止准则确保以一定置信度 η 选到至少一个无异常值的最小子集。已知真实内点率为 ε , 选到含 m 个内点的无污染样本概率为 ε^m , 选到 k 个均含至少一个外点的样本集的概率为 $(1 - \varepsilon^m)^k$ 。为使该概率低于 $1 - \eta$, 迭代次数 k 满足式 (6):

$$k \geq \frac{\log(1 - \eta)}{\log(1 - \varepsilon^m)} \quad (6)$$

其中,置信度 η 通常被设定为 0.95 或 0.99。在实际应用中,内点比例 ε 通常是未知的,这给预先计算抽样次数 k 带来了困难。因为 ε 直接影响到成功概率 $p = 1 - \varepsilon^m$, 进而影响到抽样次数 k 。如果数据集中异常值较多, ε 较小,那么 ε^m 的值会更小, $1 - \varepsilon^m$ 的值会接近 1, 根据式 (6), 此时 k 的值会变得非常大。这意味着需要进行大量的抽样才能满足置信度要求。一种方法是使用最坏情况估计来预先计算 k , 例如假设内点比例 ε 非常小(如 0.1 或

更小), 但这种方法可能会导致过度抽样, 增加不必要的计算量。更有效的方法是采用自适应停止准则, 即先根据最坏情况假设初始化 ε , 然后在算法运行过程中, 根据找到的内点集的大小来更新 ε 。随着迭代的进行, 如果发现内点数量逐渐增加, 说明实际的内点比例可能比最初假设的要高, 此时可以适当减少最大迭代次数, 从而提高算法的效率。

2.4 阈值选择

在 RANSAC 算法中, 阈值 t 起到判定数据点与模型支持度的关键作用。具体而言, 通过计算数据点相对于模型的残差, 并将其与阈值进行比对, 从而实现对内点与外点的有效识别。在常规操作流程中, 往往基于过往处理同类数据所积累的经验, 或是依据对当前数据分布的了解, 手动选择一个阈值 t 。文献[35]提到阈值选择的过程可以更正式化。假设数据点受到具有 n 个自由度的高斯噪声干扰, 该噪声均值为 0, 标准差为 σ 。阈值 t 用于确定一个数据点是否支持模型。残差服从自由度为 n 的卡方分布, 并且可以利用逆卡方分布来确定一个阈值 t , 该阈值涵盖了占比为 α 的真实内点:

$$t^2 = \chi_n^{-1}(\alpha)\sigma^2 \quad (7)$$

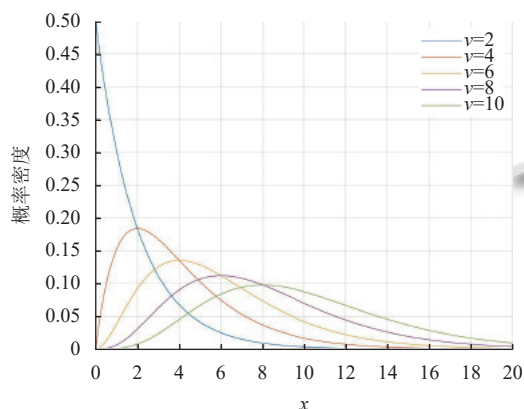
其中, χ 是累积卡方分布。 α 是内点比例, 通常设定为 0.95。因此, 当使用 $\alpha = 0.95$ 计算阈值时, 一个真正的内点被错误拒绝的概率仅为 5%。不同自由度的卡方分布密度函数和累积分布函数见图 3。

2.5 其他鲁棒估计算法

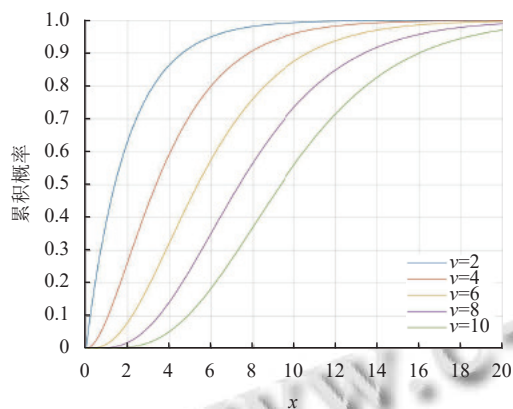
尽管本文的核心关注点主要聚焦于 RANSAC 及其变体, 但在鲁棒估计算法的领域中, 其他相关算法同样具有不可忽视的研究价值。在实际的数据处理场景中, 尤其是在面对复杂环境下的数据估计任务时, 多种算法的综合考量往往能够为解决提供更为丰富的视角与有效的策略。在此, 将简要阐述部分算法。

在控制工程与信号处理领域, 准确估计离散时间系统的状态至关重要, 但实际系统往往面临噪声方差不确定的难题。Qi 等人^[36]提出了鲁棒稳态卡尔曼估计器, 其基于极小极大鲁棒估计原理, 结合无偏线性最小方差(unbiased minimum-variance linear)^[37]最优估计准则, 充分考虑系统中噪声方差的不确定性。通过为噪声方差设定保守上界, 在滤波、预测和平滑等过程中, 依据系统的状态方程和观测方程, 利用已知的系统矩阵参数进行复杂计算与优化。例如, 在计算滤波增益、预

测误差方差等关键参数时,借助特定的方程(如 Riccati 方程和 Lyapunov 方程)进行推导和求解,从而实现了对系统状态的精确估计.即使在噪声方差存在不确定性的情况下,依然能够保证估计结果的可靠性和稳定性.作者还创新性地提出 Lyapunov 方程方法来证明估计器的鲁棒性.这种方法将鲁棒性的证明转化为对 Lyapunov 方程解的性质研究,通过严格的数学推导和分析,为算法的有效性和稳定性提供了理论依据.与一些基于经验或启发式的方法相比,具有更高的可靠性和科学性.



(a) 概率密度函数曲线



(b) 累积分布函数曲线

图3 在不同自由度 $v \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 下卡方分布的概率密度函数曲线和累积分布函数曲线

LMS (least median of squares regression)^[38]估计器能够容忍多达一半的数据点远离真实估计值,而不改变目标函数的最优值.这意味着,即使数据中存在大量异常值,LMS 仍有可能找到一个相对合理的估计.在范围数据的表面估计中,LMS 及其两种扩展方法 ALKS (adaptive least K -th order squares)^[39]和 MUSE (minimum unbiased scale estimate)^[40]在处理相邻表面深度变化方面表现出一定的优势.当不连续性幅度小于约 4.5σ (σ

为数据噪声标准差)时,能够准确估计表面补丁.然而,当不连续性幅度达到 7.5σ 或更高时,大多数标准鲁棒估计技术会出现问题导致表面估计不准确. RANSAC 及其改进版本 (MSAC、MLESAC) 和 LMS 等方法虽然常用,但是其依赖于用户提供额外信息(如噪声尺度或内点比例),且这些信息在实际应用中往往难以准确获取. Chen 等人^[41]提出的 pbM (projection-based m-estimator) 通过重新表述 M-估计器优化准则,将其转化为投影寻踪优化问题,无需用户提供尺度估计,可自动从单变量核密度估计中推导出合适的阈值.

3 RANSAC 变体

本节将以假设生成、模型优化、假设验证这 3 个思路为分类标准,从这 3 个方面介绍各类经典、新颖的 RANSAC 变体算法.

3.1 假设生成改进

3.1.1 PROSAC

区别于 RANSAC 的均匀随机采样,PROSAC 依据数据点质量进行非均匀采样.在图像匹配任务中,先基于特征匹配的相似度分数对匹配点对排序,优先从高质量匹配点中选取样本构建模型假设,随迭代推进逐渐纳入质量稍低的点,使更可能为内点的样本优先参与模型估计,提升计算资源利用效率.早期优先采样高质量点生成模型假设,能快速定位到较优模型,减少无效假设检验,相比 RANSAC 在处理大规模数据或复杂模型时优势明显.

3.1.2 NAPSAC

该方法基于数据点在空间分布上的特性进行采样.假设数据点在高维空间中分布,其中内点倾向于聚集成流形结构,而异常值相对分散. NAPSAC 先随机选一个起始点,随后在以该点为中心的超球体内搜寻足够数量的邻接数据点形成样本子集,超球体半径依据数据分布特性或先验知识设定,使采样偏向选取位于同一流形或相近结构上的内点,降低异常值入选概率,提高样本子集质量. NAPSAC 在处理高维模型估计问题时优势显著,如在复杂 3D 场景重建中,面对高维的点云数据及大量噪声和异常值干扰,传统方法采样很难获取优质无异常值样本, NAPSAC 利用空间邻域关系增加采得内点几率,提升模型参数估计可靠性.

3.1.3 Guided-MLESAC

Guided-MLESAC 引入了引导信息来优化模型估

计过程,这种引导信息可以是来自先验知识、其他相关模型或者数据的初步处理结果.在采样阶段,不像传统 MLESAC 那样完全随机采样,而是根据引导信息优先选择那些更有可能是内点的样本.这样可以提高采样效率,使得构建的模型假设更有可能接近真实模型.在处理大规模数据或者复杂模型时,这种效率提升尤为明显.例如,在三维重建任务中,需要从大量的图像特征点中估计相机位姿和场景结构.Guided-MLESAC 通过利用先验的相机位置估计或者部分可靠的特征点匹配关系,能够更快地收敛到准确的模型,大大缩短计算时间.

3.1.4 GASAC

GASAC 提出了一种将遗传算法与样本一致性相结合的创新算法.遗传算法的核心思想是模拟自然选择和遗传学的过程,通过迭代进化生成更优解.整个基因库被视作种群 G ,其中有 N 个个体,每个个体由一条染色体表示,每个染色体由 m 个模型参数编码,并且收到交叉和变异算子的影响.遗传算法的特性使得 GASAC 能够在复杂的模型参数空间中进行全局搜索.由于其不依赖于特定的模型假设或数据分布形式,GASAC 能够适应各种不同类型的数据和模型.遗传算法中的各个操作(选择、交叉、变异)以及个体适应度评估都可以在一定程度上进行并行计算.这意味着该算法可以同时多个个体进行操作和评估,大大提高了算法的计算效率.

3.1.5 NG-RANSAC

NG-RANSAC 利用神经网络来指导 RANSAC 模型假设的生成.神经网络预先在相关数据集上进行训练,学习数据的分布特征和潜在模式.在采样阶段,神经网络根据输入的数据点,预测每个数据点构建正确模型的概率.在模型估计阶段,NG-RANSAC 仍然采用类似传统 RANSAC 的方式来构建模型.但同时,会将模型估计的结果反馈给神经网络.神经网络根据反馈的模型结果和实际数据,进一步调整数据点重要性的评估.这样,在后续的采样和模型估计过程中,神经网络能够提供更准确的引导,形成一个迭代优化的过程,使模型估计不断接近最优解. NG-RANSAC 采用最终估计的内点数作为任务损失函数,这样不需要额外明确标注数据.神经网络能够自动学习数据中的复杂特征和模式,这有助于更好地理解数据背后的真实结构.例如,在三维重建任务中的点云数据,神经网络可以学

习到物体的几何形状特征,引导 RANSAC 更精确地估计物体的三维模型参数.

3.2 模型精化

3.2.1 MSAC

与 RANSAC 类似,MSAC 也是通过随机采样生成模型假设并验证.然而,在判定数据点是否为内点时,RANSAC 采用固定阈值的方式,而 MSAC 运用 M 估计函数来衡量数据点与模型的契合程度. M 估计函数是一种鲁棒的代价函数,对离群值赋予较小权重,对符合模型的数据点给予较大权重,以此降低异常值对模型估计的干扰.在处理含较多噪声或异常值的数据时表现卓越.比如在图像匹配任务中,面对大量误匹配点,MSAC 能凭借 M 估计函数有效减少异常值影响,精准确定模型参数,提高匹配准确性.

3.2.2 MLESAC

MLESAC 核心在于采用最大似然估计准则.与 RANSAC 算法主要关注内点数量不同,MLESAC 从概率视角评估模型假设.它假定数据点服从特定概率分布,根据模型计算每个数据点属于内点的概率,构建似然函数衡量模型与数据整体拟合程度,通过最大化似然函数确定最优模型参数.

3.2.3 LO-RANSAC

标准 RANSAC 在找到初始模型后停止,而 LO-RANSAC 引入了局部优化环节.当确定初始模型后,从该模型的内点集合中选取更多样本(非最小子集)重新计算模型参数,通过多次迭代优化,逐步提升模型对内点的拟合程度,降低噪声影响,使模型更精准反映数据真实结构.

3.2.4 RANSAAC

传统 RANSAC 方法虽能处理异常值,但存在诸多缺点,如结果准确性和稳定性不足、参数设置困难等.其中最重要的一点,RANSAC 的目的是找到最佳模型的单一样本.尽管在某些情况下这可能是准确的,但它忽略了在整个迭代过程中可能生成的其他全内点模型,而这些模型可以用于提高最终的准确性. RANSAAC 结合随机样本共识与统计方法,通过聚合所有生成的假设,提高 2D 变换估计的准确性和稳定性,同时保持较低的计算成本.作为该方法参数的源点取决于正在估计的全局变换,基数应至少等于最小样本大小(MSS).该方法选择能够唯一确定所需变换并使模型生成所引起的噪声最小化的点,例如,对于单应性变换,应选择

图像角落的4个点.聚合策略有加权平均和加权几何中位数(可用Weiszfeld^[42]算法来计算)两种.出现新最佳假设时执行局部优化,取内点非最小样本计算模型,然后采用贪婪策略优化结果,返回内点最多模型.RANSAAC仅聚合局部优化后的假设,提高准确性且减少处理时间.与传统方法相比,准确性平均提高了2–3倍,尤其是在噪声较大、可用内点更多以及外点比例较高的情况下,优化更为显著.

3.2.5 MAGSAC++

传统RANSAC模型质量评估方式较为简单,主要依赖内点计数或固定阈值判断,这使得在处理复杂数据时,结果准确性和稳定性欠佳,对测量噪声较为敏感,且参数设置困难,难以适应不同的数据特性.MAGSAC++引入一种新的模型质量(评分)函数,该函数基于数据点残差分布的假设,通过积分计算权重,无需明确区分内点和外点,能更全面地评估模型质量.同时,采用一种新颖的边缘化过程,将其表述为新型M-估计器,并通过迭代加权最小二乘法求解.此外,作者还提出了Progressive NAPSAC采样器.它假设邻近点可能属于同一模型,初始从局部采样,逐渐过渡到全局采样.其具体采样过程为,首先通过PROSAC策略选择第一个定位点,其余点根据距离从局部邻域选取,邻域大小依据数据动态增长.在采样过程中,计算邻域增长函数和样本命中数.作者将新采样器和MAGSAC++结合,在6个世界公开真实数据集上进行单应性和基本矩阵的拟合测试.与RANSAC、LMedS、MSAC、MAGSAC等方法相比,MAGSAC++在准确性、速度等方面表现出色.

3.2.6 GCSAC

从三维点云数据估计几何模型参数在计算机视觉中具有重要意义,但RANSAC计算成本高,在数据有噪声和异常值时面临挑战.GCSAC利用几何约束在RANSAC中寻找优质样本,提高采样点质量和估计模型精度的方法.该方法采用自适应RANSAC思想初步选择样本,初始内点率设为0.1,以方便找到估计模型候选.优质样本需满足两个条件:一是所选样本必须与估计模型一致,二是其必须满足所寻找物体的几何约束.在获得新的假设模型后,采用MLEsac算法的负对数似然准则评估和更新最佳估计模型.终止条件与自适应RANSAC一致,根据当前估计的内点率更新迭代次数,若新的迭代次数小于已执行的次数,则终止

算法.

3.2.7 Recursive RANSAC

Recursive RANSAC可以递归估计多个信号参数且无需预先知晓真实信号数量.相较于传统的RANSAC算法,Recursive RANSAC在每次扫描时采用了独特的处理策略.具体而言,对于新的观测值,首先检验其是否为前一次扫描所构建模型的内点.若判定为内点,则借助递归最小二乘法(RLS)对前一模型予以更新;反之,若为外点,则运用RANSAC算法来探寻新的模型参数.此外,为实现对多个模型的有效跟踪,在内存中构建并存储一组模型,并依据特定规则开展模型的更新、替换以及筛选等一系列操作.经由这种递归机制,Recursive RANSAC算法在每次扫描进程中借助新观测值,对多个潜在信号的模型参数展开持续更新与优化操作,在应对此类潜在信号参数估计问题时,显著提升了算法的效率与适应性表现.

3.2.8 Latent RANSAC

传统RANSAC基于随机采样与一致性检验执行模型参数估计.然而,在数据呈现复杂隐藏结构的情形下,其精准定位最优模型的能力受限.Latent RANSAC是一种能够在恒定时间区间内估计模型的策略,此估计过程与数据集规模无涉.作者指出,正确的假设在潜在参数域中呈现紧密聚集态势,故而可借助类似广义霍夫变换(generalized Hough Transform, GHT)^[43–45]的方法予以聚类定位,且与广义霍夫变换的随机化版本(randomized Hough Transform, RHT)^[46]具有更高的相似性,其中,成功完成搜索需累计超过两次的投票操作.这里的搜索策略选择的是随机网格搜索^[47],可以快速定位相似假设对.据此,计算资源消耗显著的假设验证阶段仅在检测到一对相似假设时启动,并且作者表明,当假设处于错误状态时,该相似假设对出现的概率处于极低水平.通过考虑潜在变量,Latent RANSAC能够挖掘数据中的隐藏信息,从而构建更准确的模型.在处理复杂的数据,如含有大量噪声和异常值的图像或传感器数据时,它可以更好地拟合数据的真实结构.

3.2.9 LRtsac

LRtsac是一种基于似然比检验来稳健估计模型参数的方法,作者的目的是解决异常值情况下的模型估计问题,特别是当内点噪声水平未知时.作者通过将模型参数和内点噪声水平联合优化,利用似然比检验统计量作为目标函数,合理控制I型错误,同时提出早

期停止策略提高效率. 具体而言, 通过定义数据的混合分布模型, 计算似然比检验统计量来判断数据集是否符合某种假设分布, 进而确定模型参数; 在优化过程中, 对模型参数随机采样, 对噪声水平穷举评估; 通过计算采样迭代次数和最小内点比例, 确定噪声水平搜索范围并自适应调整迭代次数; 利用基于 Hoeffding 不等式浓度界的早期停止策略加速模型验证. 在处理 3D 平面估计、单应性估计和基础矩阵估计等问题时, 与传统 RANSAC 相比, 其准确性相当, 但运行速度更快.

3.3 假设验证改进

3.3.1 RRANSAC- $T_{d,d}$

RANSAC 中的假设检验步骤计算代价很高. 在基于图像的三维重建场景中, 从不同视角拍摄的城市地标建筑图像集规模可达百万级. 每张照片可能包含数千个特征点, 整体数据集的特征点数量可达数百万, 计算代价极高. 因此, 作者引入了 $T_{d,d}$ 测试, 在模型验证阶段, 并非对所有数据点直接验证模型假设, 而是先从数据集中随机选取 d 个数据点 ($d \ll N$, N 为数据点总数) 进行初步测试. 若 d 个点均符合模型 (即被判定为内点), 再进一步对剩余 $N-d$ 个点进行验证; 否则, 立即舍弃该模型假设并重新采样生成新假设. 此策略通过早期排除大量劣质模型, 减少不必要的计算开销. d 的值用式 (8) 计算:

$$d^* = \frac{\ln \left(\frac{\ln \varepsilon(t_M + 1)}{N(\ln \delta - \ln \varepsilon)} \right)}{\ln \delta} \quad (8)$$

其中, t_M 是计算从样本中得出模型参数所需的时间, δ 是数据点与随机模型一致的概率, ε 是数据中异常值所占的比例. 由于 d 是正整数, 所以最优测试点数 d_{opt} , 在 $\{[d^*], [d^*]\}$ 中选择, 且必须大于 0.

3.3.2 RRANSAC-BO

在传统 RANSAC 中, 会进行多次随机采样和模型评估, 直到达到预设的迭代次数或者找到足够好的模型. 然而, 这种方式可能会导致不必要的计算, 尤其是在已经明显知道当前采样不会产生更好结果的情况下. 该方法定义了一种简单的早期跳出测试. 在这种测试中, 如果一个假设当前的得分无法超越到目前为止所测试过的最佳假设的得分, 那么就不再针对剩余数据对该假设做进一步的检查. 接着, 作者提出了另一种测试方法. 在该测试中, 会随机选取一个大小为 n 的子集进行评估, 并计算出这个子集中内点的比例 ε . 如果 ε 明

显小于到目前为止所找到的最佳内点比例 $\varepsilon_{\text{best}}$, 那么对其余数据点进行评估从而得到比 $\varepsilon_{\text{best}}$ 更好结果的可能性就非常小. 此时便可以提前终止对该假设的评估, 以避免不必要的计算.

3.3.3 RRANSAC-SPRT

利用 RANSAC 进行计算时, 通常需要估计内点比例. 而该方法提出了一种不需要估计内点比例的方法, 作者基于 Wald 的序列决策理论^[48], 推导出了一个能以 $1-\eta$ 的置信度生成解决方案的过程. Wald 的序贯概率比检验基于似然比 λ_i :

$$\lambda_i = \prod_{r=1}^i \frac{p(x_r|H_b)}{p(x_r|H_g)} = \lambda_{i-1} \cdot \frac{p(x_i|H_b)}{p(x_i|H_g)} \quad (9)$$

其中, H_g 是模型良好的假设, 也就是说, 该模型是由仅由内点组成的样本计算得出的; 而 H_b 则对应于模型是不良的备择假设. 对于 x_r , 当且仅当第 r 个数据点与评估的模型一致时, x_r 的值为 1, 否则为 0. 与“好”模型一致的概率 $P(1|H_g)$ 通过数据点中的内点比例 ε 近似, 而与“坏”模型一致的概率 $P(1|H_b)$ 被建模为伯努利分布, 其参数为 δ . 由于大多数测试模型都是“坏”的, 因此可以通过拒绝的模型中一致数据点的平均比例来估计 δ . ε 的精确值无法获取, 但可以用当前已知的最大支持度来给出 ε 的一个下界. 该方法摒弃了对数据内点比例等先验知识的依赖, 且在模型验证过程中, 借助序贯概率比检验对可能的“坏”模型进行早期判断, 避免了针对此类模型的无效假设检验, 显著提升了模型估计的速率.

4 实验分析

在本节中, 本文将评估 RANSAC 及其相关变体在影像匹配应用中的性能表现, 通过各个算法的实验比较, 深入分析 RANSAC 的优势与不足, 并探索其在实际应用中的可行性和局限性.

4.1 比较方法介绍

RANSAC: 标准 RANSAC 算法, 如算法 1 所述.

PROSAC: 采用渐进式采样, 优先选择高质量数据点构建模型假设, 加快模型收敛速度.

MAGSAC++: 运用基于评估数据点可靠性的自适应评分和加权机制, 提升算法的鲁棒性和准确性, 能更精准地处理含噪声和异常值的数据.

LO-RANSAC: 对初始模型进行局部优化, 从初始

模型的点集合中选取更多样本重新计算模型参数,以提高对复杂数据的准确性。

GCSAC: 有效利用几何约束寻找优质样本, 在对几何敏感的场景中实现更精确的模型拟合, 能有效利用几何约束寻找优质样本, 提高采样点质量和估计模型精度。

RRANSAC- $T_{d,d}$: 通过在模型验证阶段随机选 d 个数据点进行初步测试来排除劣质模型, 减少计算开销。


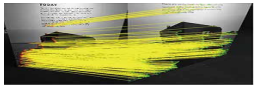
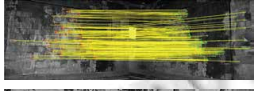




RRANSAC-SPRT: 通过序贯概率比检验判断模型, 不依赖内点比例等先验知识, 早期判断“坏”模型避免无效假设检验, 提升模型估计速率。

4.2 数据集

本文采用了 Hpatches^[49] (<https://github.com/hpatches/hpatches-dataset>) 和 Homogr^[50] (<https://cmp.felk.cvut.cz/data/geometry2view/index.xhtml>) 数据集。为了全面且深入地对算法性能进行分析, 我们将实验分为定性和定量两个部分。

在定性分析部分, 我们选取 7 组真实图像 (见表 2), 依次为: Vard、Wounded、Wall、Wormhole、Boat、BostonLib、City。其中前 4 组是 Hpatches 数据集中的图像, 后 3 组是 Homogr 数据集中的图像。

表 2 7 组图像的信息

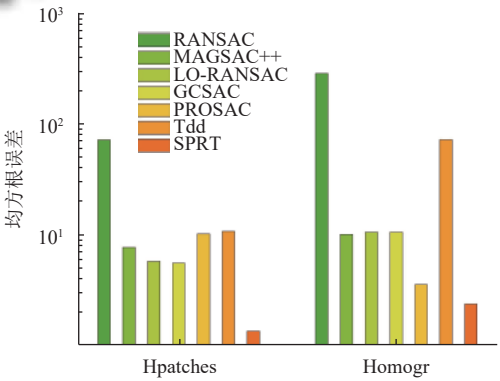
图像名	图像	匹配数	内点率 (%)
Vard		3 418	88.00
Wounded		760	75.13
Wall		501	62.87
Wormhole		550	22.18
Boat		783	29.24
BostonLib		1 308	30.88
City		159	62.89

在定量分析阶段, 考虑到结果的准确性和普遍性, 我们使用 Hpatches (300 对) 和 Homogr (16 对) 两个数

据集, 对比了 RANSAC 及其变体的准确率和均方根误差, 对比结果见图 4。



(a) 在两个数据集上准确率的比较结果



(b) 在两个数据集上均方根误差的比较结果

图 4 7 种方法的定性实验分析

4.3 评价指标

所有实验的最大迭代次数均为 5 000, 置信度 η 设置为 0.99, 在匹配过程中使用 SIFT 特征点和描述方式, 在定性实验部分, 本文选取了 4 个评价指标。

找到的内点数 I : 内点数越多, 说明算法对数据中有效信息的提取能力越强, 模型的可靠性可能越高。

生成的模型数 $model$: 反映了算法在迭代过程中生成模型的频繁程度, 模型数过多可能意味着算法在寻找最优模型时的效率较低。

每个模型的验证次数 vpm : 体现了对每个模型进行验证的工作量, 验证次数越高, 计算成本越大。

运行时间 $time$ (ms): 直观地反映了算法的计算效率, 运行时间越短, 算法在实际应用中的实时性和可用性可能越高, 尤其在处理大规模数据或对时间敏感的场景中, 运行时间是一个关键的性能指标。

在定量分析阶段, 本文选取了 2 个评价指标来比较方法性能。

准确率 (Accuracy): 反映了算法对真实匹配点的识别能力与模型拟合精度. 首先对方法返回的内点集合中的点进行齐次化处理, 通过与真实单应性矩阵 H 相乘得到变换后的齐次坐标点, 归一化后计算该坐标点与对应目标点的欧氏距离, 当且仅当该距离小于 3 像素时, 判定为有效匹配. 准确率即为有效匹配点占内点集合总数的百分比.

均方根误差 (RMSE): 用于衡量模型预测值与真实值之间的偏差程度. 假设存在 N 组点对, 第 i 个匹配点对在经过模型变换后的预测坐标为 (x_i^p, y_i^p) , 实际观测坐

标为 (x_i^t, y_i^t) , 则均方根误差为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i^p, y_i^p)^2 - (x_i^t, y_i^t)^2}{N}} \quad (10)$$

均方根误差的值越小, 说明模型预测值与真实值之间的偏差越小, 模型对数据的拟合效果越好, 模型的准确性越高.

RANSAC、PROSAC、MAGSAC++、LO-RANSAC、GCSAC、RRANSAC- $T_{d,d}$ 、RRANSAC-SPRT 这 7 种方法在真实图像上的实验结果比较见表 3.

表 3 7 种方法在 7 组真实图像上的比较结果

图像	指标	RANSAC	PROSAC	GCSAC	MAGSAC++	LO-RANSAC	RRANSAC- $T_{d,d}$	RRANSAC-SPRT
Vard	I	2960	2807	2600	2616	3011	2805	2858
	model	33	7	11	12	8	64	8
	vpm	3418	3418	3418	3418	3418	2	1
	time	21.09	2.94	2.50	14.18	7.03	14.25	45.86
Wounded	I	557	519	571	546	551	566	532
	model	12	18	13	22	14	109	32
	vpm	760	760	760	760	760	2	6
	time	16.40	3.07	2.41	2.32	6.21	8.58	6.70
Wall	I	256	263	287	290	290	253	268
	model	33	41	25	22	34	232	22
	vpm	501	501	501	501	501	2	4
	time	17.84	5.38	4.31	2.86	6.99	9.45	6.29
Wormhole	I	187	156	192	148	176	141	147
	model	343	812	380	897	436	1782	814
	vpm	550	550	550	550	550	21	13
	time	59.80	97.34	22.16	25.82	28.86	25.64	24.56
Boat	I	333	327	314	309	328	360	288
	model	167	149	175	311	147	3272	168
	vpm	783	783	783	783	783	253	7
	time	38.09	19.87	11.52	10.54	14.19	28.67	6.43
BostonLib	I	430	458	454	426	458	459	458
	model	392	304	488	555	775	5000	230
	vpm	1308	1308	1308	1308	1308	179	6
	time	92.86	47.93	29.70	19.79	44.71	75.45	25.89
City	I	98	98	100	88	97	101	99
	model	30	29	27	46	30	511	31
	vpm	159	159	159	159	159	4	3
	time	16.36	4.55	3.19	2.81	6.88	12.41	6.59

4.4 结果分析

在对多种方法的性能比较中, PROSAC 方法展现出自身的独特. 其采用的渐进式采样策略使得在模型假设生成阶段能够快速地聚焦于更有可能的样本组合, 从而在计算速度上相较于 RANSAC 有了显著的提升, 能够在较短的时间内完成模型的初步估计和迭代过程. 然而, 这种快速收敛的方式可能导致其在搜索内点的过程中不够全面和深入, 使得最终返回的内点数可

能较低. 虽然 PROSAC 能够快速地给出一个模型估计, 但该模型所涵盖的内点数量相对较少, 可能在模型的准确性和鲁棒性方面存在问题, 尤其在对数据内点比例要求较高的应用场景中, 其性能可能会受到一定的影响.

LO-RANSAC、MAGSAC++和 GCSAC 这 3 种方法在寻找内点的能力上水平相近. 它们在处理数据时, 都能够有效地识别出数据中的内点, 从而得到数量相

近的内点集合。例如, MAGSAC++利用自适应的评分和加权机制, 能够根据数据点的可靠性进行精准的内点判断; GCSAC 则借助几何约束关系, 从数据的几何结构出发, 准确地筛选出符合模型的内点。不过, 在计算效率方面, LO-RANSAC 相较于 MAGSAC++和 GCSAC 存在劣势, 其速度较慢。LO-RANSAC 的局部优化过程虽然有助于提高模型的准确性, 但在大规模数据的应用场景中, 其较长的计算时间可能成为一个关键的瓶颈。这是因为它需要在局部区域内对模型进行反复的优化和验证, 涉及更多的计算资源和时间开销。相比之下, MAGSAC++和 GCSAC 在保证内点数量的同时, 能够以相对更快的速度完成模型的估计和内点的搜索过程, 在计算效率和准确性之间实现了更好的平衡。

RRANSAC- $T_{d,d}$ 、RRANSAC-SPRT 这两种方法在模型验证阶段进行了优化。 $T_{d,d}$ 测试基于随机选点初步测试机制, 早期排除劣质模型, 大幅削减验证次数。RRANSAC-SPRT 基于序贯概率比检验高效判断模型, 在保证准确性同时减少验证开销。由于模型验证在 RANSAC 中计算资源消耗巨大, 这两种方法因验证次数的大幅降低, 均获得极大的速度提升。

在图 4 中可以看到, RRANSAC-SPRT 的均方根误差是最低的, 但是准确率低于 MAGSAC++、GCSAC、LO-RANSAC。

5 总结与展望

本文以假设生成、模型精化、假设验证为分类标准介绍了现有 RANSAC 变体并分析了它们的性能。下面将从方法思路总结、现存挑战及未来方向 3 个方面进行总结。

(1) 在假设生成方面, 现有的 RANSAC 改进主要是优化采样策略, 提高采样质量和效率, 提高采样到内点的概率, 进而加速模型收敛。比如 PROSAC 依据数据点质量排序, 优先选择高质量点构建模型假设; NAPSAC 利用数据点的空间分布特性, 在超球体内选取邻接数据点, 增加内点采样概率; Guided-MLESAC 借助引导信息, 优先选择可能的内点样本; GASAC 运用遗传算法全局搜索模型参数空间; NG-RANSAC 通过神经网络学习数据特征, 预测数据点构建正确模型的概率来指导采样。但现有改进方法在样本点质量判定和内点概率预测上缺乏精准方法。不同场景下数据特性差异大, 难以找到通用、准确的判定与预测方式, 影响采样

质量和模型收敛速度。如在复杂 3D 场景重建的高维点云数据中, 数据分布复杂且存在大量噪声和异常值, 准确判断样本点质量和内点概率变得极为困难。因此, 未来可结合多源信息、机器学习及深度学习技术, 精确度量样本点质量、预估内点概率, 尝试把点云数据的几何特征、语义信息跟深度学习模型相结合, 精确指导采样, 实现模型快速收敛。

(2) 在模型精化方面, 现有的 RANSAC 改进大多围绕优化模型参数估计、降低噪声和异常值影响展开。MSAC 利用 M 估计函数, 依据数据点与模型的契合程度分配权重, 减少异常值在模型估计中的权重; MLESAC 从概率视角出发, 通过最大化似然函数确定最优模型参数; LO-RANSAC 在找到初始模型后进行局部优化, 重新计算模型参数, 提升模型对数据的拟合度。但现有方法进行参数估计时对噪声敏感, 易陷入局部最优。未来可结合贝叶斯非参数建模自适应学习噪声分布, 通过流形约束优化实现全局结构一致性, 或设计相关深度神经网络, 突破传统精化方法对噪声分布的强假设限制, 提升复杂场景下的模型精度与计算效率。

(3) 在假设验证方面, 现有的 RANSAC 改进聚焦于优化假设检验步骤, 避免后续模型精化不必要的计算开销, 提高估计的可靠性。如 $T_{d,d}$ 测试通过随机选取部分数据点初步测试模型, 早期排除劣质模型; Bail-Out Test 定义早期跳出测试, 避免对低质量模型的无效验证; RRANSAC-SPRT 借助序贯概率比检验, 在不依赖内点比例先验知识的情况下, 早期判断“坏”模型, 减少无效假设检验。尽管现有改进方法在减少计算开销和提高估计可靠性上取得一定进展, 但在大规模数据和实时性要求高的场景中, 假设验证效率仍需提升。例如在三维重建等涉及海量数据的应用中, 即使采用了上述优化方法, 计算负担依然较重。为此, 需构建更高效的假设验证方法, 用少量数据点精准预估模型质量。未来可结合数据挖掘与信息论, 挖掘关键信息, 快速判断模型好坏, 减少无效假设检验, 提升 RANSAC 效率; 或探索基于主动学习的策略, 动态选取信息量足的数据点用于模型验证, 以适配复杂应用场景需求。

参考文献

- 1 Fischler MA, Bolles RC. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. Communications of the

- ACM, 1981, 24(6): 381–395. [doi: [10.1145/358669.358692](https://doi.org/10.1145/358669.358692)]
- 2 Chum O, Matas J. Matching with PROSAC-progressive sample consensus. Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Diego: IEEE, 2005. 220–226.
- 3 Myatt DR, Torr PHS, Nasuto SJ, *et al.* NAPSAC: High noise, high dimensional robust estimation—It's in the bag. Proceedings of the 2002 British Machine Vision Conference. Cardiff: DBLP, 2002. 458–467.
- 4 Tordoff BJ, Murray DW. Guided-MLESAC: Faster image transform estimation by using matching priors. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(10): 1523–1535. [doi: [10.1109/TPAMI.2005.199](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2005.199)]
- 5 Rodehorst V, Hellwich O. Genetic algorithm sample consensus (GASAC)—A parallel strategy for robust parameter estimation. Proceedings of the 2006 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop (CVPRW 2006). New York: IEEE, 2006. 103.
- 6 Brachmann E, Rother C. Neural-guided RANSAC: Learning where to sample model hypotheses. Proceedings of the 2019 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Seoul: IEEE, 2019. 4321–4330.
- 7 叶锦华, 林旭敏, 吴海彬. 基于 DBSCAN 的改进 RANSAC 点云平面拟合算法. 湖南大学学报(自然科学版), 2025, 52(2): 76–87.
- 8 车德福, 钟壬清, 马保东, 等. 改进 RANSAC 的无人机三维模型建筑轮廓半自动提取. 桂林理工大学学报, 2024, 44(4): 649–655. [doi: [10.3969/j.issn.1674-9057.2024.04.010](https://doi.org/10.3969/j.issn.1674-9057.2024.04.010)]
- 9 许可可, 朱文球, 郭富禄. 基于结构相似的 RANSAC 改进算法. 计算机工程与应用, 2016, 52(12): 168–171, 245. [doi: [10.3778/j.issn.1002-8331.1407-0332](https://doi.org/10.3778/j.issn.1002-8331.1407-0332)]
- 10 Fotouhi M, Hekmatian H, Kashani-Nezhad MA, *et al.* SC-RANSAC: Spatial consistency on RANSAC. Multimedia Tools and Applications, 2019, 78(7): 9429–9461. [doi: [10.1007/s11042-018-6475-6](https://doi.org/10.1007/s11042-018-6475-6)]
- 11 王可, 贾松敏, 李秀智. 基于全概率更新的改进 RANSAC 算法. 控制与决策, 2017, 32(3): 427–434.
- 12 樊彦国, 柴江龙, 许明明, 等. 基于 ORB 与 RANSAC 融合改进的图像配准. 光学精密工程, 2019, 27(3): 702–717.
- 13 江洁, 凌思睿. 一种投票式并行 RANSAC 算法及其 FPGA 实现. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1145–1150.
- 14 王亚伟, 许廷发, 王吉晖. 改进的匹配点提纯算法 mRANSAC. 东南大学学报(自然科学版), 2013, 43(S1): 163–167.
- 15 Torr PHS, Zisserman A. Robust parameterization and computation of the trifocal tensor. Image and Vision Computing, 1997, 15(8): 591–605. [doi: [10.1016/S0262-8856\(97\)00010-3](https://doi.org/10.1016/S0262-8856(97)00010-3)]
- 16 Torr PHS, Zisserman A. MLESAC: A new robust estimator with application to estimating image geometry. Computer Vision and Image Understanding, 2000, 78(1): 138–156. [doi: [10.1006/cviu.1999.0832](https://doi.org/10.1006/cviu.1999.0832)]
- 17 Baráth D, Noskova J, Ivashechkin M, *et al.* MAGSAC++, a fast, reliable and accurate robust estimator. Proceedings of the 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Seattle: IEEE, 2020. 1301–1309.
- 18 Korman S, Litman R. Latent RANSAC. Proceedings of the 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City: IEEE, 2018. 6693–6702.
- 19 Chum O, Matas J, Kittler J. Locally optimized RANSAC. Proceedings of the 25th DAGM Symposium on Pattern Recognition. Magdeburg: Springer, 2003. 236–243.
- 20 Le VH, Vu H, Nguyen TT, *et al.* Acquiring qualified samples for RANSAC using geometrical constraints. Pattern Recognition Letters, 2018, 102: 58–66. [doi: [10.1016/j.patrec.2017.12.012](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2017.12.012)]
- 21 Niedfeldt PC, Beard RW. Recursive RANSAC: Multiple signal estimation with outliers. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(23): 430–435. [doi: [10.3182/20130904-3-FR-2041.00213](https://doi.org/10.3182/20130904-3-FR-2041.00213)]
- 22 Cohen A, Zach C. The likelihood-ratio test and efficient robust estimation. Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision. Santiago: IEEE, 2015. 2282–2290.
- 23 夏克付, 李鹏飞, 陈小平. 基于改进 RANSAC 算法的单一矩阵鲁棒估计方法. 计算机工程与应用, 2017, 53(23): 147–152.
- 24 张红民, 曾祯. 一种改进的相邻概率随机抽样一致性算法. 激光杂志, 2013, 34(5): 29–30.
- 25 Matas J, Chum O. Randomized RANSAC with $T_{d,d}$ test. Image and Vision Computing, 2004, 22(10): 837–842. [doi: [10.1016/j.imavis.2004.02.009](https://doi.org/10.1016/j.imavis.2004.02.009)]
- 26 Capel DP. An effective Bail-Out test for RANSAC consensus scoring. Proceedings of the 2005 British Machine Vision Conference. Oxford: DBLP, 2005. 78.
- 27 Matas J, Chum O. Randomized RANSAC with sequential probability ratio test. Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision, Volume 1. Beijing: IEEE, 2005. 1727–1732.
- 28 范帅鑫, 谷玉海, 邹志, 等. 基于改进 RANSAC 的本质矩阵求解方法. 电子测量技术, 2024, 47(7): 114–120. [doi: [10.19651/j.cnki.emt.2314803](https://doi.org/10.19651/j.cnki.emt.2314803)]

- 29 杨永刚, 武楚健, 杨正全. 基于融合改进 RANSAC 光流法的无人机视觉 SLAM 研究. 半导体光电, 2023, 44(2): 277–283.
- 30 李云帆, 谭德宝, 刘瑞, 等. 顾及建筑物屋顶结构的改进 RANSAC 点云分割算法. 国土资源遥感, 2017, 29(4): 20–25.
- 31 Moisan L, Moulon P, Monasse P. Automatic homographic registration of a pair of images, with a contrario elimination of outliers. *Image Processing on Line*, 2012, 2: 56–73. [doi: [10.5201/ipol.2012.mmm-oh](https://doi.org/10.5201/ipol.2012.mmm-oh)]
- 32 Wei T, Patel Y, Shekhovtsov A, *et al.* Generalized differentiable RANSAC. *Proceedings of the 2023 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. Paris: IEEE, 2023. 17603–17614.
- 33 周骏, 陈雷霆, 刘启和, 等. 基于序贯概率及局部优化随机抽样一致性算法. 仪器仪表学报, 2012, 33(9): 2037–2044.
- 34 孙雪强, 黄旻, 张桂峰, 等. 改进 RANSAC 算法在多光谱图像匹配中的应用. 半导体光电, 2018, 39(4): 563–568.
- 35 Raguram R, Chum O, Pollefeys M, *et al.* USAC: A universal framework for random sample consensus. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(8): 2022–2038. [doi: [10.1109/TPAMI.2012.257](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.257)]
- 36 Qi WJ, Cong S, Zhang P. Robust steady-state Kalman estimators for discrete-time system with uncertain noise variances. *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference (CCC)*. Chengdu: IEEE, 2016. 2961–2966.
- 37 Kitanidis PK. Unbiased minimum-variance linear state estimation. *Automatica*, 1987, 23(6): 775–778. [doi: [10.1016/0005-1098\(87\)90037-9](https://doi.org/10.1016/0005-1098(87)90037-9)]
- 38 Rousseeuw PJ. Least median of squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 1984, 79(388): 871–880. [doi: [10.1080/01621459.1984.10477105](https://doi.org/10.1080/01621459.1984.10477105)]
- 39 Lee KM, Meer P, Park RH. Robust adaptive segmentation of range images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1998, 20(2): 200–205. [doi: [10.1109/34.659940](https://doi.org/10.1109/34.659940)]
- 40 Padua RN, Regalado DY, Perez KP, *et al.* Minimum variance unbiased estimation of the scale parameter of exponential distributions and related logarithmic integrals. *Journal of Higher Education Research Disciplines*, 2018, 3(1): 25–32.
- 41 Chen HF, Meer. Robust regression with projection based m-estimators. *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision*. Nice: IEEE, 2003. 878–885.
- 42 Weiszfeld E, Plastria F. On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum. *Annals of Operations Research*, 2009, 167(1): 7–41. [doi: [10.1007/s10479-008-0352-z](https://doi.org/10.1007/s10479-008-0352-z)]
- 43 Hough PVC, Powell BW. A method for faster analysis of bubble chamber photographs. *Il Nuovo Cimento* (1955–1965), 1960, 18(6): 1184–1191. [doi: [10.1007/BF02733175](https://doi.org/10.1007/BF02733175)]
- 44 Ballard DH. Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes. *Pattern Recognition*, 1981, 13(2): 111–122. [doi: [10.1016/0031-3203\(81\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0031-3203(81)90009-1)]
- 45 Duda RO, Hart PE. Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Communications of the ACM*, 1972, 15(1): 11–15. [doi: [10.1145/361237.361242](https://doi.org/10.1145/361237.361242)]
- 46 Xu L, Oja E. Randomized Hough transform (RHT): Basic mechanisms, algorithms, and computational complexities. *CVGIP: Image Understanding*, 1993, 57(2): 131–154. [doi: [10.1006/ciun.1993.1009](https://doi.org/10.1006/ciun.1993.1009)]
- 47 Aiger D, Kokopoulou E, Rivlin E. Random grids: Fast approximate nearest neighbors and range searching for image search. *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision*. Sydney: IEEE, 2013. 3471–3478.
- 48 Wald A. *Sequential Analysis*. New York: Dover Publications, 2004.
- 49 Balntas V, Lenc K, Vedaldi A, *et al.* Hpatches: A benchmark and evaluation of handcrafted and learned local descriptors. *Proceedings of the 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Honolulu: IEEE, 2017. 3852–3861.
- 50 Lebeda K, Matas J, Chum O. Fixing the locally optimized RANSAC. *Proceedings of the 2012 British Machine Vision Conference*. Surrey: BMVA Press, 2012. 95.

(校对责编: 张重毅)